Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala

SS 2010

2. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 05.05. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe des Erfüllbarkeitstests für Horn-Formeln aus der Vorlesung, ob die folgende Folgerung gilt:

$$\{\, A \wedge B \rightarrow C,\ D \wedge E \rightarrow A,\ C \wedge F \rightarrow D,\ F \wedge D \rightarrow E \,\} \models B \vee C \vee (F \rightarrow B)\,.$$

Geben Sie dabei für jeden Schritt des Algorithmus die Menge der markierten Variablen an.

(b) Zu zwei aussagenlogischen Interpretationen $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ über dem gleichen Definitionsbereich σ definieren wir eine neue Interpretation $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 : \sigma \rightarrow \{0,1\}$ durch

$$(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X) = \min(\mathfrak{I}_1(X), \mathfrak{I}_2(X))\,.$$

Zeigen Sie, dass für jede Horn-Formel φ der Schnitt zweier Modelle wieder ein Modell ist, d.h. wenn $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ und $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$, dann auch $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 \models \varphi$.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie für jede der folgenden Formeln, ob sie äquivalent zu einer Horn-Formel ist.

(i) $(X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow Z)$;
(ii) $Y \vee ((X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z))$;
(iii) $(X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow \neg Z)$;
(iv) $\neg(X \rightarrow Y) \vee \neg(Y \rightarrow Z)$.

Aufgabe 2

10 Punkte

(a) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ und $\varphi \in \mathrm{AL}$. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen:

(i) Wenn $\Phi \models \varphi$, dann auch $\Phi' \models \varphi$ für jede Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$.
(ii) Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$, dann ist Φ unerfüllbar.
(iii) Wenn φ eine Tautologie ist, dann gilt $\Phi \models \varphi$.
(iv) Wenn φ unerfüllbar ist, dann gilt $\Phi \not\models \varphi$.

Stimmt eine Aussage nicht, geben Sie jeweils ein konkretes Gegenbeispiel an.

(b) Eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ ist *endlich axiomatisierbar*, wenn eine endliche Formelmenge $\Psi \subseteq \mathrm{AL}$ existiert, welche die gleichen Modelle hat wie Φ.

Sei $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Formelmenge, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, $\varphi_{n+1} \models \varphi_n$ aber $\varphi_n \not\models \varphi_{n+1}$. Zeigen Sie, dass Φ nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3 10 Punkte

Eine Ordnung auf einer Menge M ist eine Relation $< \subseteq M \times M$, die irreflexiv ($\forall a \in M \colon a \not< a$) und transitiv ($\forall a, b, c \in M \colon a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$) ist. Die Ordnung $<$ heißt linear, wenn für alle $a, b \in M$ mit $a \neq b$ entweder $a < b$ oder $b < a$ gilt. Zeigen Sie, dass auf jeder Menge M eine lineare Ordnung $< \subseteq M \times M$ existiert.

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für endliche Mengen M per vollständiger Induktion nach der Anzahl der Elemente von M. Für den Fall unendlicher Mengen M definieren Sie eine Menge aussagenlogischer Formeln, mit Variablen X_{ab} für $a, b \in M$, deren Modelle gerade den linearen Ordnungen auf M entsprechen. Wenden Sie dann den Kompaktheitssatz an.