Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala

SS 2010

4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 19.05. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Entscheiden Sie, ob folgende Formel unerfüllbar ist, indem Sie $\text{Res}^*(\varphi)$ berechnen:

$$\varphi := (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge (W \vee \neg Z) \wedge (X \vee Z) \wedge \neg W.$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie durch Resolution, dass folgende Formel allgemeingültig ist:

$$X \vee (\neg X \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z).$$

(c) Zeigen Sie, dass sich die Erfüllbarkeit einer Klauselmenge K nicht ändert, wenn man aus K alle Klauseln entfernt, die eine Variable enthalten, welche nur positiv oder nur negativ in K vorkommt. Verwenden Sie dies um mit Hilfe der Resolutionsmethode zu zeigen, dass $\varphi \wedge \psi$ erfüllbar ist, wobei

$$\begin{aligned}\varphi &:= (X \rightarrow (Y \vee Z)) \wedge (Z \rightarrow V) \wedge (Y \vee V) \wedge (Z \rightarrow (\neg X \vee V)) \text{ und}\\ \psi &:= ((Z \wedge \neg V) \rightarrow X) \wedge \neg(\neg V \vee \neg Z) \wedge (X \rightarrow (V \vee Z)) \wedge (V \vee \neg X \vee \neg Y)\\ &\quad \wedge ((\neg V \wedge \neg X) \rightarrow (Y \vee Z)).\end{aligned}$$

Aufgabe 2 10 Punkte

Die folgende Einschränkung des Resolutionsbegriffs heißt *P-Resolution*: Es darf nur dann eine Resolvente aus den Klauseln C_1 und C_2 gebildet werden, wenn eine der beiden Klauseln positiv ist. Dabei heißt eine Klausel *positiv*, falls sie kein negatives Literal enthält.

(a) Zeigen Sie, dass jede Klauselmenge ohne positive Klauseln erfüllbar ist.

(b) Zeigen Sie per P-Resolution, dass die Klauselmenge

$$K = \{\{\neg Z, Y\}, \{V, X, Z\}, \{\neg X, V\}, \{\neg V, Y\}, \{\neg Y\}\}$$

unerfüllbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass der P-Resolutionskalkül korrekt ist: Wenn aus einer Klauselmenge K die leere Klausel $\Box$ durch P-Resolution abgeleitet werden kann, dann ist K unerfüllbar.

(d) Zeigen Sie, dass der P-Resolutionskalkül vollständig ist: Ist eine Klauselmenge K unerfüllbar ist, so lässt sich $\Box$ aus K durch P-Resolution ableiten.

Hinweis: Führen Sie den Beweis per Induktion über die Anzahl der in K vorkommenden Aussagenvariablen. Betrachten Sie dabei die Verteilung der Klauseln auf Mengen A, B und C dementsprechend, ob eine Klausel eine gegebene Variable positiv, negativ oder gar nicht enthält.

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Welche der folgenden Sequenzen sind gültig? Begründen Sie Ihre Antworten semantisch, d. h. mit Hilfe von Interpretationen, nicht durch Ableitungen im Sequenzenkalkül.

(i) $(X \to Y), (Z \to Y) \;\Rightarrow\; (X \vee Z), \neg Y$;

(ii) $(X \vee Y),\; Y \to (Z \vee X) \;\Rightarrow\; X,\; Z$.

(b) Überprüfen Sie durch geeignete Anwendung der Resolutionsmethode, ob folgende Sequenz gültig ist: $(X \to Z),\; (Y \to Z) \;\Rightarrow\; (X \vee Y) \to Z$.

(c) Zeigen Sie, dass die Implikationsregeln ($\to\Rightarrow$) und ($\Rightarrow\to$) des aussagenlogischen Sequenzenkalküls korrekt sind, das heißt: Sind alle Prämissen gültig, so ist auch die Konklusion gültig.

$$(\to\Rightarrow) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \to \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow\to) \quad \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \to \vartheta}$$