Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala

SS 2010

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 02.06. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Konstruieren Sie für die folgenden Sequenzen jeweils einen Beweis im Sequenzenkalkül oder geben Sie eine falsifizierende Interpretation an:

(a) $X \vee Y,\ Y \rightarrow (Z \vee X) \ \Rightarrow\ X,\ Z$

(b) $X \rightarrow Y,\ Z \rightarrow Y \ \Rightarrow\ X \vee Z,\ \neg Y$

(c) $X \rightarrow Y,\ Y \rightarrow Z \ \Rightarrow\ Y \wedge (X \rightarrow Z),\ Y \rightarrow \neg X$

Aufgabe 2 10 Punkte

Eine Schlussregel ist *korrekt*, wenn (für jede Wahl von $\Gamma, \Delta, \psi, \varphi, \ldots$) die Gültigkeit aller Prämissen die Gültigkeit der Konklusion impliziert. Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln:

(a) $$\frac{\Gamma, \varphi \ \Rightarrow\ \Delta \qquad \Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, \varphi}{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta}$$

(b) $$\frac{\Gamma,\ \varphi \ \Rightarrow\ \Delta \qquad \Gamma \ \Rightarrow\ \Delta,\ \psi}{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, \psi \rightarrow \varphi}$$

(c) $$\frac{\Gamma, \varphi, \neg\psi \ \Rightarrow\ \Delta \qquad \Gamma, \neg\varphi, \psi \ \Rightarrow\ \Delta}{\Gamma, \varphi \oplus \psi \ \Rightarrow\ \Delta}$$

Hier bezeichnet $\oplus$ den Junktor für das *exklusive Oder*.

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Sei $|$ der logische Junktor für NAND, definiert durch $\mathfrak{I} \models (\varphi \mid \psi)$ gdw. $\mathfrak{I} \not\models (\varphi \wedge \psi)$.

Geben Sie Schlussregeln $(\mid\Rightarrow)$ und $(\Rightarrow\mid)$ an, die Ihnen erlauben, den Junktor $|$ auf der linken bzw. rechten Seite der Konklusion einzuführen (analog zu den Schlussregeln $(\wedge \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \wedge)$ für $\wedge$) und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schlussregeln.

Konstruieren Sie einen Beweis für die Sequenz

$$(X \mid Y) \mid Z \ \Rightarrow\ (Z \rightarrow X) \wedge (Z \rightarrow Y)$$

in dem um die Schlussregeln $(\mid\Rightarrow)$ und $(\Rightarrow\mid)$ erweiterten Sequenzenkalkül.

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Schlussregel korrekt ist:

$$\frac{\Gamma, \varphi \ \Rightarrow\ \Delta \qquad \Gamma, \psi \ \Rightarrow\ \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \ \Rightarrow\ \Delta}$$

Für die Regeln des Sequenzenkalküls gilt, dass aus der Gültigkeit der Konklusion auch die Gültigkeit aller Prämissen folgt. Zeigen Sie dies für die Implikationsregeln $(\rightarrow\Rightarrow)$ und $(\Rightarrow\rightarrow)$. Gilt dies auch für obige Regel? Zeigen oder widerlegen Sie, dass Satz 1.32 für den um diese Regel erweiterten Sequenzenkalkül gilt.

Aufgabe 4 10+10* Punkte

(a) Beweisen Sie das aussagenlogische *Interpolationstheorem*: Sei $\psi \rightarrow \varphi$ eine aussagenlogische Tautologie. Dann existiert eine Formel $\vartheta \in \mathrm{AL}$ mit $\tau(\vartheta) \subseteq \tau(\psi) \cap \tau(\varphi)$, so dass $\psi \rightarrow \vartheta$ und $\vartheta \rightarrow \varphi$ Tautologien sind.

Hinweis: Führen Sie einen Induktionsbeweis über die Anzahl der Aussagenvariablen, die in ψ, aber nicht in φ vorkommen.

(b*) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine Formelmenge und $X \in \tau(\Phi)$ eine Aussagenvariable. X heißt *explizit definierbar* in Φ, wenn eine Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ existiert, die X nicht enthält, so dass $\Phi \models X \leftrightarrow \varphi$. (In Modellen von Φ ist also der Wahrheitswert von X durch eine Formel, die nicht von X abhängt, explizit festgelegt). Demgegenüber heißt X *implizit definierbar* in Φ, wenn für alle Modelle $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}'$ von Φ gilt: Wenn $\mathfrak{I}(Z) = \mathfrak{I}'(Z)$ für alle Ausssagenvariablen $Z \neq X$, dann auch $\mathfrak{I}(X) = \mathfrak{I}'(X)$. (In Modellen von Φ ist also der Wahrheitswert von X durch die Wahrheitswerte der anderen Variablen implizit festgelegt).

Beweisen Sie das *aussagenlogische Definierbarkeitstheorem*: Wenn X implizit in Φ definierbar ist, dann ist X auch explizit in Φ definierbar.

Hinweis: Die Formelmenge Φ' entstehe dadurch, dass man X in allen Formeln von Φ durch eine neue Aussagenvariable $X' \notin \tau(\Phi)$ ersetzt. Die implizite Definierbarkeit von X in Φ besagt dann, dass $\Phi \cup \Phi' \models X \leftrightarrow X'$. Benutzen Sie den Kompaktheitssatz, um Φ durch eine endliche Formelmenge zu ersetzen und verwenden Sie das aussagenlogische Interpolationstheorem, um eine explizite Definition von X in Φ zu konstruieren.

Mit * gekennzeichnete Aufgaben sind Zusatzaufgaben.