Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala

SS 2010

6. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 09.06. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Geben Sie alle Redukte der Struktur $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ an.

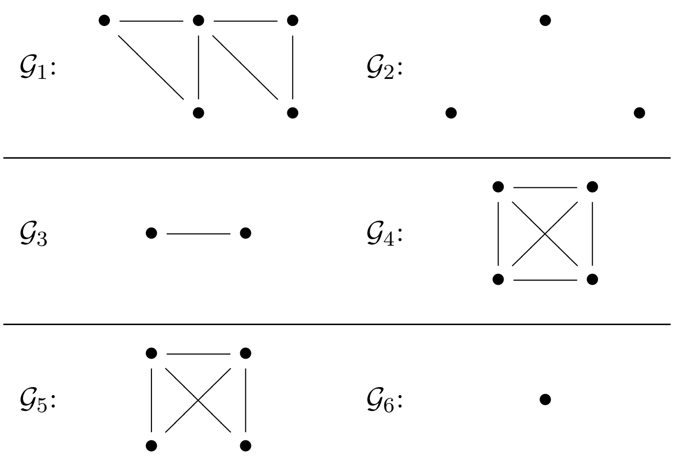
(b) Geben Sie alle Substrukturen von $(\mathbb{N}, \leq)$ und von $(\mathbb{N}, S)$ an, wobei $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Nachfolgerfunktion auf $\mathbb{N}$ ist, das heißt $S(n) = n + 1$.

(c) Geben Sie für zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ die kleinste Substruktur von $(\mathbb{Z}, +, -)$ an, welche m und n enthält. Ist dies eine echte Substruktur?

(d) Geben Sie alle Substrukturen der Strukturen $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ sowie $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ (mit Addition modulo 4 bzw. 5) an.

Aufgabe 2 10 Punkte

Wir betrachten folgende Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$:



Bestimmen Sie, in welchen dieser Graphen folgende Sätze jeweils gelten. Geben Sie kurze und prägnante Begründungen an.

$\varphi_1 := \forall x \forall y (x \neq y \to Exy)$;

$\varphi_2 := \exists x \exists y \exists z (Exy \land Eyz \land Ezx)$;

$\varphi_3 := \exists x \forall y (x \neq y \to Exy)$;

$\varphi_4 := \exists x \forall y (\neg Exy)$.

Aufgabe 3 10 Punkte

Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, N^{\mathfrak{A}})$ der Signatur $\tau = \{+, \cdot, N\}$, mit der üblichen Addition und Multiplikation sowie $N^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$. Drücken Sie die folgenden Sachverhalte in FO(τ) aus. Achten Sie dabei auf die freien Variablen Ihrer Formeln.

(a) $x = 0$.

(b) x ist eine natürliche Zahl ist, die durch drei teilbar ist.

(c) $x > y$.

(d) x ist eine irrationale Zahl.

(e) Es gibt beliebig kleine echt positive Zahlen.

Aufgabe 4 10 Punkte

Wir betrachten eine endliche Signatur τ.

(a) Sei $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ eine Menge von FO(τ)-Sätzen und

$$\Phi' := \{\varphi_0\} \cup \{\, (\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}) \rightarrow \varphi_n \;:\; n > 0\,\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(\Phi')$.

(b) Eine Menge $\mathit{\Phi}$ von FO(τ)-Sätzen heißt *glatt*, wenn keine Struktur mehr als einen Satz aus $\mathit{\Phi}$ verletzt, d.h. wenn für jede τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt $|\{\varphi \in \Phi \;:\; \mathfrak{A} \not\models \varphi\}| \leq 1$. Zeigen Sie, dass jede FO-axiomatisierbare Klasse auch ein glattes Axiomensystem hat.