Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala

SS 2010

11. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 14.07. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Welche der folgenden Sequenzen sind gültig?

(i) $\varphi(c) \Rightarrow \forall x\varphi(x)$, wobei c nicht in φ vorkommt;

(ii) $\forall x\exists y(\varphi \land \psi) \Rightarrow \forall x\exists y\varphi \land \forall x\exists y\psi$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie (semantisch) die Korrektheit der folgenden Regeln:

(i) $\dfrac{\Gamma,\ \varphi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \exists x\varphi(x) \Rightarrow \Delta}$;

(ii) $\dfrac{\Gamma,\ \exists x\psi \Rightarrow \Delta,\ \forall x\varphi}{\Gamma,\ \forall x\psi \Rightarrow \Delta,\ \exists x\varphi}$.

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Sei $\mathfrak{A} = (A, f)$ eine Struktur mit einer einstelligen Funktion $f : A \to A$ und sei $\sim\, \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation auf A. Sei ferner $R_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ der Graph von f. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$, so auch auf der Struktur (A, R_f).

(ii) Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf der Struktur (A, R_f), so auch auf $\mathfrak{A}$.

(b) Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur, $\sim\, \subseteq A \times A$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$ und sei $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{FO}(\tau)$ eine positive Formel. (Das heißt φ ist mit $\lor$, $\land$, $\exists$ und $\forall$ aus atomaren Formeln aufgebaut.) Zeigen Sie, dass für alle $a_1, \dots, a_n \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ auch $\mathfrak{A}/\sim\, \models \varphi([a_1], \dots, [a_n])$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von (b) nicht gilt. Zeigen Sie ferner, dass (b) nicht für beliebige FO-Formeln gilt.

Aufgabe 3 10 Punkte

Sei C eine Menge von Konstanten mit $c_0, c_1 \in C$. Sei ferner $T := \{c_i = c_j : c_i, c_j \in C - \{c_0\}\} \cup \{f^2c_0 = f^2c_1, f^5c_0 = fc_1\} \cup \{Rc_0, Rf^3c_1\}$, Σ die kleinste Menge, die T enthält und unter Substitution abgeschlossen ist, sowie $\sim$ die von Σ induzierte Kongruenzrelation auf der Herbrandstruktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$.

(a) Beschreiben Sie Σ.

(b) Beschreiben Sie $\mathfrak{H}(\Sigma)$ und die kanonische Struktur $\mathfrak{A}(\Sigma) := \mathfrak{H}(\Sigma)_{/\sim}$.

(c) Ist $\mathfrak{A}(\Sigma)$ ein Modell von T?

(d) Sei $T' := T \cup \{\exists x(Rx \land Rfx)\}$. (Dann ist Σ auch der Abschluss von T' unter Substitution.) Zeigen Sie: T' ist erfüllbar, aber $\mathfrak{A}(\Sigma) \not\models T'$.