Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala

SS 2010

12. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 21.07. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Geben Sie für die folgenden Klassen von Strukturen jeweils ein Axiomensystem an. Geben Sie ferner ein endliches Axiomensystem an oder zeigen Sie mit Hilfe der Methode von Ehrenfeucht-Fraïssé, dass kein endliches Axiomensystem existiert.

(a) Die Klasse der unendlichen linearen Ordnungen.

(b) Die Klasse der ungerichteten Graphen ohne Kreis.

(c) Die Klasse der endlichen dichten linearen Ordnungen.

Aufgabe 2 — 10 Punkte

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Methode von Ehrenfeucht-Fraïssé, dass die Klasse der überabzählbaren Graphen nicht FO-axiomatisierbar ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass die Klasse

$$\{(A, f) : \text{für alle } a \in A \text{ gibt es ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } f^n(a) = a\}$$

nicht FO-axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3 — 10 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie für die folgenden Klassen von Strukturen jeweils, dass sie FO-axiomatisierbar beziehungsweise endlich FO-axiomatisierbar sind.

(a) Die Klasse der zu $(\mathbb{Z}, +)$ isomorphen Strukturen.

(b) Die Klasse der zu $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$ isomorphen Strukturen.

(c) Die Klasse der endlichen Gruppen.

(d) Die Klasse der unendlichen Gruppen.

(e) Die Klasse der überabzählbaren Gruppen.

Aufgabe 4 — 10 Punkte

Zeigen sie, dass das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln der Gestalt $\exists x_1 \dots \exists x_r \forall y_1 \dots \forall y_s \varphi$ entscheidbar ist, wobei φ quantorenfrei und relational sein soll.
Hinweis: Zeigen Sie, dass jeder erfüllbare Satz dieser Gestalt ein Modell mit höchstens r Elementen besitzt.