Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2010

Probeklausur Mathematische Logik

Aufgabe 1

(a) Es gelte $\Phi \models \varphi$. Treffen folgende Aussagen immer zu?

	ja	nein	weiß nicht
Für alle Teilmengen $\Psi \subseteq \Phi$ gilt $\Psi \models \varphi$.	☐	☐	☐
Für alle Obermengen $\Psi \supseteq \Phi$ gilt $\Psi \models \varphi$.	☐	☐	☐
Es gibt eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$, so dass $\Phi_0 \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist.	☐	☐	☐

(b) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ eine abzählbare und erfüllbare Satzmenge. Treffen folgende Aussagen immer zu?

	ja	nein	weiß nicht
Φ hat ein endliches Modell.	☐	☐	☐
Φ hat ein abzählbares Modell.	☐	☐	☐
Φ hat ein überabzählbares Modell.	☐	☐	☐
Alle Modelle von Φ sind elementar äquivalent.	☐	☐	☐

(c) Seien φ und ψ aussagenlogische Formeln, so dass $\varphi \vee \psi$ unerfüllbar ist. Treffen folgende Aussagen immer zu?

	ja	nein	weiß nicht
Sowohl φ als auch ψ sind unerfüllbar.	☐	☐	☐
$\varphi \wedge \psi$ ist unerfüllbar.	☐	☐	☐
$\varphi \to \psi$ ist eine Tautologie.	☐	☐	☐
$\psi \to \varphi$ ist unerfüllbar.	☐	☐	☐

(d) Welche der folgenden Sätze gelten in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subsetneq)$?

	ja	nein	weiß nicht
$(\exists x \forall y\; y \subsetneq x \vee y = x) \wedge (\exists y \forall x\; y \subsetneq x \vee y = x)$	☐	☐	☐
$\exists x \exists y (\neg x \subsetneq y \wedge \neg y \subsetneq x)$	☐	☐	☐
$\forall x \forall y (x \subsetneq y \to \exists z (x \subsetneq z \wedge z \subsetneq y))$	☐	☐	☐
$\forall x \forall y \forall z (x \subsetneq y \wedge y \subsetneq z \to x \subsetneq z)$	☐	☐	☐

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie mittels Resolution, dass die folgende Folgerung gilt:

$$(X \to Y) \wedge (Y \to 0) \wedge (U \wedge Z \to Y) \wedge (X \vee Y \vee Z) \models (X \wedge Y) \vee (\neg Y \wedge \neg U)$$

(b) Eine aussagenlogische Formel φ *koppelt* die Variablen X und Y, falls für jedes Modell $\mathfrak{I}$ von φ gilt: $\mathfrak{I}(X) = \mathfrak{I}(Y)$. Zeigen Sie, wie man mittels der Resolutionsmethode nachweisen kann, dass eine Formel φ die Variablen X und Y koppelt.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass bei der Resolution von Hornklauseln eine Nicht-Hornklausel entstehen kann.

Aufgabe 3

Wir betrachten folgende Strukturen:

$$\mathfrak{A}_1 := (\{0,1\}, \cdot\,); \qquad \mathfrak{A}_3 := (\mathbb{R}, \cdot\,);$$
$$\mathfrak{A}_2 := (\mathbb{Q}, \cdot\,); \qquad \mathfrak{A}_4 := (\mathbb{C}, \cdot\,).$$

Geben Sie für jede dieser Strukturen $\mathfrak{A}_i$ einen Satz $\varphi_i \in \mathrm{FO}$ an, der sie von den übrigen Strukturen trennt, d. h. $\mathfrak{A}_i \models \varphi_i$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_i$ für $j \neq i$.

Aufgabe 4

Seien E und R zweistellige Relationssymbole, f ein zweistelliges Funktionssymbol und g ein einstelliges Funktionssymbol.

(a) Formen Sie folgende Formeln in Negations- und Pränexnormalform um.

(i) $\varphi := \exists x[\forall y(Exz \wedge \neg Eyx) \to \forall y(Efxyz \wedge \forall zRxz)]$.

(ii) $\psi := [\exists z \forall x(\exists y(Exy \wedge Eyz) \wedge \forall y \forall z(Eyz \vee Exz \to y = z))] \to \forall zExfyz$.

(b) Formen Sie folgende Formel in Skolem-Normalform um.

$$\varphi := \forall x \forall z \forall y\Big(\exists z(\neg Rgxz \vee Ryz) \wedge \neg\forall x\big(Rxz \vee \exists y(Ryx \wedge Rgygz)\big)\Big)$$

Aufgabe 5

Beweisen oder widerlegen Sie die Definierbarkeit der folgenden Relationen:

(a) Die Menge der 2er-Potenzen in $(\mathbb{N}, \cdot\,)$;

(b) Die Menge der Primpotenzen in $(\mathbb{N}, \cdot\,)$;

(c) Die Menge der ganzen Zahlen in $(\mathbb{Q}, +)$;

(d) Die Ordnung $\leq$ in $(\mathbb{R}, +, \cdot\,)$.

Aufgabe 6

Welche der folgenden Strukturklassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar?

(a) die Klasse aller linearen Ordnungen;

(b) die Klasse aller abzählbaren Mengen;

(c) die Klasser aller zu $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ isomorphen Strukturen;

(d) die Klasse aller endlichen Mengen;