Fixpunktlogik

Eine fundamentale Schwäche der Logik erster Stufe ist das Fehlen eines Mechanismus, um Rekursion oder unbeschränkte Iteration auszudrücken. Damit lassen sich wichtige Eigenschaften wie Erreichbarkeit nicht ausdrücken. Man kann sogar zeigen, dass in einem präzisen Sinn die Logik erster Stufe nur lokale Eigenschaften ausdrücken kann. Dies trifft damit natürlich auch auf alle Fragmente der Logik erster Stufe zu, wie beispielsweise die Modallogik. Daher ist es natürlich, nach Erweiterungen der Logik erster Stufe zu fragen, welche auch nicht-lokale Eigenschaften ausdrücken können. Eine sehr natürliche Erweiterung der Logik erster Stufe ist die Logik zweiter Stufe. Allerdings ist die volle Logik zweiter Stufe algorithmisch und modelltheoretisch kaum mehr handhabbar.

Eine äußerst wichtige und elegante Methode um einen Rekursionsmechanismus zur Logik erster Stufe hinzuzufügen, sind Fixpunktlogiken. Man erweitert dabei eine Logik dadurch, dass man größte und kleinste Fixpunkte von Operatoren, welche durch eine Formel definierbar sind, selbst wieder als Formel ausdrückbar macht. Wir betrachten hier sowohl die Erweiterung der vollen Logik erster Stufe zu einer Fixpunktlogik, der Logik LFP (least fixed point logic) als auch die Erweiterung der Modallogik zu einer Fixpunktlogik, der Logik L_μ (modaler μ-Kalkül).

Es gibt mehrere Gründe, die Erweiterung einer Einschränkung der Logik erster Stufe zu einer Fixpunktlogik gesondert zu betrachten (obwohl man bereits eine Erweiterung der vollen Logik erster Stufe zu einer Fixpunktlogik hat.) Zum Einen stellt sich natürlich für jede Logik die Frage, ob es möglicherweise Einschränkungen dieser Logik gibt, welche bessere Eigenschaften in modelltheoretischer und algorithmischer Hinsicht haben, in denen gleichzeitig aber viele interessante Eigenschaften ausdrückbar sind. Zum Anderen ist speziell in diesem Fall L_μ eine sehr natürliche Logik um über Transitionsysteme beziehungsweise Graphen zu sprechen. Dies lässt durch eine große Anzahl von Argumenten rechtfertigen. Zuallererst ist L_μ gerade die Fixpunkterweiterung einer natürlichen Logik für Transitionssysteme, der Modallogik. Ferner lassen sich viele weitere solche Logiken wie LTL (linear time temporal logic) und CTL*, eine Erweiterung von CTL (computation tree logic), in L_μ einbetten. Darüber hinaus lassen sich in L_μ die Existenz von Gewinnstrategien in Paritätsspielen und die Komplexität von Graphen bezüglich gewisser Komplexitätsmaße ausdrücken. Und schließlich hat sich herausgestellt, dass L_μ gerade das bisimulationsinvariante Fragment der monadischen Logik zweiter Stufe ist.

Wir benötigen nun zunächst einige Grundlagen über Fixpunkte, die wir im folgenden Abschnitt darlegen. Dieser Abschnitt steht nur in Englischer Sprache zur Verfügung.

1 Lattices and Fixed Points

Orderings. Let X be a set. A *pre-order* on X is a relation $\leq\ \subseteq X \times X$ which is reflexive ($\forall x \in X : x \leq x$) and transitive ($\forall x, y, z \in X : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$).

An *ordering* on X is a pre-order $\leq$ on X which is also antisymmetric ($\forall x, y \in X : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$). (Notice that a pre-order $\leq$ which is also symmetric ($\forall x, y \in X : x \leq y \Rightarrow y \leq y$) is an equivalence relation.) The *strict part* of a pre-order $\leq$ is the relation $<:=\leq \setminus \mathrm{id}_X$. If $\leq$ is an ordering, then the relation $<$ is irreflexive ($\forall x \in X : x \not< x$) and transitive. From those two properties we can conclude that it is also antisymmetric ($\forall x, y \in X : x < y \Rightarrow y \not< x$). (Notice that we have two formulations of antisymmetry, one for a pre-order $\leq$ and one for a strict pre-order $<$.) A pre-order $\leq$ is called *total* or *linear* if every two elements are comparable ($\forall x, y \in X : x \leq y \vee y \leq x$).

A pre-order $\leq$ on X is called *well-quasi-ordering* if for each infinite sequence $(x_i)_{i<\omega} \in X^\omega$ there are numbers $i < j < \omega$ such that $x_i \leq x_j$. A total ordering which is a well-quasi-ordering is called *well-ordering*. An element $x \in X$ is called *least element* with respect to a pre-order $\leq$ if there is no element less than x ($\forall y \in X : y \leq x \Rightarrow y = x$). Analogously, x is called greatest element if there is no element greater than x ($\forall y \in X : x \leq y \Rightarrow y = x$). Of course, if $\leq$ is a total ordering then a least element (if it exists) is unique. A total ordering $<\subseteq X \times X$ is a well ordering, if and only if each nonempty subset of X has a least element with respect to $\leq$. An element $x \in X$ is called *supremum* of a set $Y \subseteq X$ with respect to an ordering $\leq$ on X if it is the least upper bound of Y ($\forall y \in X : y \leq x \wedge \forall x' \in X : (\forall y \in X : y \leq x') \Rightarrow x \leq x'$). Analogously an element $x \in X$ is called *infimum* of $Y \subseteq X$ with respect to an ordering $\leq$ on X if it is the greatest lower bound of Y.

A nonempty subset $\emptyset \neq Y \subseteq X$ of an ordered set $(X, \leq)$ is called a *chain* in $(X, \leq)$, if $\leq$ is a total ordering on Y. In the contrary, the set Y is called an *antichain* in $(X, \leq)$, if each two different elements of Y are not comparable with respect to $\leq$ ($\forall x, y \in Y : x \neq y \Rightarrow x \not\leq y \wedge y \not\leq x$).

Lattices and Boolean Algebras. Let X be a set and let $\leq \subseteq X \times X$ be an ordering on X. The partially ordered set $(X, \leq)$ is called *lattice*, if for all $x, y \in X$, the set $\{x, y\}$ has an infimum and a supremum in X with respect to $\leq$. We denote $\sup\{x, y\} =: x \vee y$ and call this the *join* of x and y and we denote $\inf\{x, y\} =: x \wedge y$ and call this the meet of x and y. A lattice $(X, \leq)$ is called *bounded*, if X has a least and a greatest element with respect to $\leq$. Notice that although $\leq$ is not necessarily a total ordering, the least and the greatest element of a bounded lattice are unique since if there would be, for instance, two different least element x and y then the set $\{x, y\}$ would again have an infimum which then would be strictly less than x and y. A lattice $(X, \leq)$ is called *complete* if each subset $Y \subseteq X$ has a supremum and an infimum. We denote $\sup Y =: \bigvee Y$ and call this the *join* of Y and we denote $\inf Y =: \bigwedge Y$ and call this the *meet* of Y. Notice that a complete lattice is obviously bounded. If $(X, \leq)$ is a lattice, then the the two binary functions $\vee$ for the join and $\wedge$ for the meet fulfill the commutative laws ($\forall x, y \in X : x \vee y = y \vee x$), ($\forall x, y \in X : x \wedge y = y \wedge x$), the associative laws ($\forall x, y, z \in X : x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$), ($\forall x, y, z \in X : x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$) and the absorbation laws ($\forall x, y \in X : x \vee (x \wedge y) = x$), ($\forall x, y \in X : x \wedge (x \vee y) = x$) which connect the two functions. From those properties we can conclude that also the identitive laws hold ($\forall x \in X : x \vee x = x$), ($\forall x \in X : x \wedge x = x$). If $(X, \leq)$ is a bounded lattice, then the least element, which we denote by 0, is the neutral element with respect to $\vee$ ($\forall x \in X : x \vee 0 = x$) and the greatest element, which we denote by 1, is the neutral element with respect to $\wedge$ ($\forall x \in X : x \wedge 1 = x$). If, conversely, X is a set with two binary functions $\wedge$ and $\vee$ such that the commutative laws, the associative laws and the absorbation laws hold, then the relation $\leq \subseteq X \times X$ with $x \leq y :\Longleftrightarrow x = x \wedge y$ is an ordering of X and $(X, \leq)$ is a lattice. If there are neutral elements 0 with respect to $\vee$ and 1 with respect to $\wedge$, then $(X, \leq)$ is a bounded lattice.

A Boolean algebra is a tuple $(X, \wedge, \vee, \neg)$ where $\wedge$ and $\vee$ are binary functions and $\neg$ is a unary function, such that $(X, \wedge, \vee)$ is a bounded lattice and such that the following conditions hold. First, $\vee$ and $\wedge$ fulfill the distributive laws ($\forall x, y, z \in X : x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$), ($\forall x, y, z \in X : x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$). Furthermore, the complementation laws hold ($\forall x \in X : x \vee \neg x = 1$), ($\forall x \in X : x \wedge \neg x = 0$).

Fixed Points. In the following $(X, \leq)$ is always a complete lattice.

Definition 1.1. Let $F : X \to X$ be an operator.

(1) F is called *monotone*, if for all $x, y \in X$ with $x \leq y$ we have $F(x) \leq F(y)$.
(2) F is called *inflationary*, if $x \leq F(x)$ for all $x \in X$.
(3) $x \in X$ is called *fixed point* of F, if $F(x) = x$.
(4) $x \in X$ is called *least* (*greatest*) *fixed point* of F, if x is a fixed point of F and for each fixed point $y \in X$ of F we have $x \leq y$ ($y \leq x$).

Proposition 1.1. *Let $F_1 : X \to X$ and $F_2 : X \to X$ be monotone operators. Then the pointwise defined operators $F_1 \wedge F_2$ and $F_1 \vee F_2$ are montone as well.*

Now let $F : X \to X$ be an operator. We inductively define a sequence $(x^\alpha)_{\alpha \in \mathrm{On}}$, $x^\alpha \in X$ for $\alpha \in \mathrm{On}$ by

- $x^0 = 0$
- $x^{\alpha+1} = F(x^\alpha)$ for $\alpha \in \mathrm{On}$
- $x^\lambda = \bigvee \{x^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ for each limit ordinal $\lambda \in \mathrm{On}$.

F is called *inductive*, if $x^\beta \leq x^\alpha$ for all $\alpha \in \mathrm{On}$ and all $\beta < \alpha$.

Proposition 1.2. *Let $F : X \to X$ be an inductive operator. Then there is an ordinal number $\beta < |X|^+$ such that $x^{\beta+1} = x^\beta$.*

The least $\beta \in \mathrm{On}$ with this property is called the (*upwards*) *closure ordinal* of F and is denoted by $\mathrm{cl}{\uparrow}(F)$.

Proof. Assume that no such $\beta < |X|^+$ exists. Then since F is inductive for all $\beta < |X|^+$ there is some $a_\beta \in x^{\beta+1} \setminus x^\beta$. But then $|\{a_\beta \mid \beta < |X|^+\}| = |X|^+$ which is a contradiction to $\{a_\beta \mid \beta < |X|^+\} \subseteq X$. $\square$

Now if $F : X \to X$ is an inductive operator then obviously we have $x^\alpha = x^{\mathrm{cl}\uparrow(F)} =: x^\infty$ for all $\alpha \in \mathrm{On}$ such that $\mathrm{cl}{\uparrow}(F) < \alpha$ and $F(x^\infty) = F(x^{\mathrm{cl}\uparrow(F)}) = x^{\mathrm{cl}\uparrow(F)+1} = x^{\mathrm{cl}\uparrow(F)} = x^\infty$, so x^∞ is a fixed point of F. In particular, every inductive operator has a fixed point.

Proposition 1.3. *Let $F : X \to X$ be an operator which is inflationary or monotone. Then F is inductive. In particular, F has a fixed point.*

Proof. The case where F is inflationary is trivial. If F is monotone, then a straightforward induction yields that F is inductive. $\square$

Theorem 1.1. *(Knaster, Tarski) Let $F : X \to X$ be a monotone operator and let* $\mathrm{lfp}(F) = \bigwedge\{x \in X \,|\, F(x) \le x\}$ *and* $\mathrm{gfp}(F) = \bigvee\{x \in x \,|\, x \le F(x)\}$. *Then* $\mathrm{lfp}(F)$ *is the least fixed point of F and* $\mathrm{gfp}(F)$ *is the greatest fixed of F.*

Proof. Let $S := \{x \in X \,|\, F(x) \le x\}$. Then according to proposition 0.3, S is nonempty. Now let $y := \bigwedge S$. Then we have $y \le x$ for all $x \in S$ and since F is monotone this yields $F(y) \le F(x) \le x$ for all $x \in S$. So $F(y) \le \bigwedge S = y$. Together with the monotony of F we can conclude that $F(F(y)) \le F(y)$ and so $F(y) \in S$ which entails $y = \bigwedge S \le F(y)$. So we have $F(y) \le y$ and $y \le F(y)$ and thus $F(y) = y$. Furthermore $y \le x$ for all $x \in X$ such that $F(x) \le x$ and so in particular $y \le x$ for each fixed point x of F. Thus y is the least fixed point of F. The reasoning for $\mathrm{gfp}(F)$ is completely analog. $\square$

Theorem 1.2. *Let $F : X \to X$ be a monotone operator. Then $x^\infty = \mathrm{lfp}(F)$.*

Proof. Since x^∞ is a fixed point of F we have $\mathrm{lfp}(F) \le x^\infty$ and according to the Theorem of Knaster and Tarski we have $\mathrm{lfp}(F) = \bigwedge\{z \in X \,|\, F(z) \le z\}$. So it suffices to show that for all $\alpha \in \mathrm{On}$ we have $x^\alpha \le z$ for all $z \in X$ such that $F(z) \le z$. Then in particular we have $x^\infty \le z$ for all $z \in X$ such that $F(z) \le z$ and thus $x^\infty \le \mathrm{lfp}(F)$.

We proceed by induction on α. For $\alpha = 0$ there is nothing to show and for $\alpha \in \mathrm{On}$ by the induction hypothesis and the monotony of F we have $x^{\alpha+1} = F(x^\alpha) \le F(z) \le z$ for all $z \in X$ such that $F(z) \le z$. Finally, if $\lambda \in \mathrm{On}$ is a limit ordinal and for all $\alpha < \lambda$ we have $x^\alpha \le z$ for all $z \in X$ such that $F(z) \le z$, then $x^\lambda = \bigvee\{x^\alpha \,|\, \alpha < \lambda\} \le z$ for all $z \in X$ such that $F(z) \le z$ as well. $\square$

We can construct the greatest fixed point of a monotone operator $F : X \to X$ inductively as well. We define a sequence $(y^\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$, $y^\alpha \in X$ for $\alpha \in \mathrm{On}$ as follows.

- $y^0 = 1$.
- $y^{\alpha+1} = F(y^\alpha)$ for $\alpha \in \mathrm{On}$.
- $y^\lambda = \bigwedge\{y^\alpha \,|\, \alpha < \lambda\}$ for each limit ordinal $\lambda \in \mathrm{On}$.

If F is monotone, then $y^{\alpha+1} \le y^\alpha$ for all $\alpha \in \mathrm{On}$ and with the same arguments as in the proof of proposition 0.2 we see that there is some $\beta \in \mathrm{On}$ such that $y^{\beta+1} = y^\beta$ and thus $y^\alpha = y^\beta$ for all $\alpha \in \mathrm{On}$ with $\beta < \alpha$. We define $y^\infty := y^\beta$ and we denote this β by $\mathrm{cl}{\downarrow}(F)$. Then obviously y^∞ is a fixed point of F and with the same arguments as in the proof of Theorem 0.2 (using the Theorem of Knaster and Tarski) one can show that $y^\infty = \mathrm{gfp}(F)$.

Proposition 1.4. *Let $G : X \times X \to X$ be an operator, such that for all $y \in X$, the operator $F_y : X \to X$ with $F_y(x) = G(x, y)$ for $x \in X$ is monotone and such that for all $x \in X$, the operator $F_x : X \to X$ with $F_x(y) = G(x, y)$ for $y \in X$ is monotone. Then the operators* $\mathrm{lfp}_G : X \to X$ *with* $\mathrm{lfp}_G(y) = \mathrm{lfp}(F_y)$ *for $y \in X$ and* $\mathrm{gfp}_G : X \to X$ *with* $\mathrm{gfp}_G(y) = \mathrm{gfp}(F_y)$ *for $y \in X$ are monotone.*

Now assume that there is a unary function $\neg$ on X such that $(X, \vee, \wedge, \neg)$ is a Boolean algebra. We show that least and greatest fixed points of monotone operators on this lattice are dual to each other. For this purpose, for a monotone operator $F : X \to X$ we define the dual operator $F^d : X \to X$ via $F^d(x) = \neg F(\neg x)$. Then the following result holds.

Theorem 1.3. *(Duality of least and greatest fixed points)*
Let $F : X \to X$ be a monotone operator. Then F^d is montone as well and we have $\mathrm{lfp}(F) = \neg\,\mathrm{gfp}(F^d)$ *and* $\mathrm{gfp}(F) = \neg\,\mathrm{lfp}(F^d)$.

Proof. First we show that F^d is monotone, so let $x \leq y$. Then, as one can easily show, $\neg y \leq \neg x$, thus $F(\neg y) \leq F(\neg x)$ and therefore $F^d(x) = \neg F(\neg x) \leq \neg F(\neg y) = F^d(y)$. Now let $0 = x^0 \leq x^1 \leq \ldots \leq x^\infty = \mathrm{lfp}(F)$ and $1 = y^0 \geq y^1 \geq \ldots \geq y^\infty = \mathrm{gfp}(F^d)$ be defined as in the inductive constructions of least and greatest fixed point. We show by induction over α that for all $\alpha \in \mathrm{On}$ we have $y^\alpha = \neg x^\alpha$. For $\alpha = 0$ this is trivial and for arbitrary $\alpha \in \mathrm{On}$ we have $y^{\alpha+1} = F^d(y^\alpha) = \neg F(\neg y^\alpha) = \neg F(x^\alpha) = \neg x^{\alpha+1}$. Finally, if α is a limit ordinal, then it is easy to see that $y^\alpha = \bigwedge\{y^\beta \,|\, \beta < \alpha\} = \bigwedge\{\neg x^\beta \,|\, \beta < \alpha\} = \neg \bigvee\{x^\beta \,|\, \beta < \alpha\} = \neg x^\alpha$. From this one can easily deduce that $\mathrm{cl}{\uparrow}(F) = \mathrm{cl}{\downarrow}(F^d)$ and therefore $\mathrm{lfp}(F) = x^\infty = \neg y^\infty = \neg\,\mathrm{gfp}(F^d)$. The reasoning for $\mathrm{gfp}(F) = \neg\,\mathrm{lfp}(F^d)$ is completely analog. □

2 Der modale μ-Kalkül

Wir wollen nun den modalen μ-Kalkül L_μ definieren, das heißt wir wollen die übliche Modallogik ML um Fixpunkte erweitern. Intuitiv bedeutet dies, wenn φ eine Formel ist, die über eine atomare Proposition P spricht, so soll auch die Aussage "v liegt im kleinsten (beziehungsweise größten) Fixpunkt von $P \mapsto \varphi(P)$" eine Formel sein. Dazu müssen wir natürlich die Abbildung $P \mapsto \varphi(P)$ präzisieren und uns hinreichende syntaktische Eigenschaften überlegen, um zu garantieren, dass diese Abbildung einen größten und kleinsten Fixpunkt besitzt.

Wir betrachten dazu eine Signatur $\tau = \{E_a \,|\, a \in A\} \cup \{P_i \,|\, i \in I\}$ von Transitionssystemen sowie eine Menge A von Aussagenvariablen X mit $A \cap \tau = \emptyset$. Sei nun $\psi \in \mathrm{ML}(\tau \cup A)$ eine modallogische Formel über der Signatur $\tau \cup A$, wobei jedes $X \in A$ als atomare Proposition aufgefasst wird. Sei nun $X \in A$ eine beliebige Aussagenvariable, $\mathcal{K} = (V, \tau^{\mathcal{K}})$ ein Transitionssystem der Signatur τ und sei $\beta : A \to \mathcal{P}(V)$ eine Belegung der Variablen $Y \in A$ durch Mengen $\beta(Y) \subseteq V$ von Knoten in $\mathcal{K}$. Ferner bezeichne $\beta[Y \mapsto U]$ für ein $Y \in A$ und $U \subseteq V$ diejenige Belegung der Variablen $\beta[Y \mapsto U] : A \to \mathcal{P}(V)$ mit $\beta[Y \mapsto U](Z) = \beta(Z)$ für alle $Z \in A \setminus \{Y\}$ und $\beta[Y \mapsto U](Y) = U$. Dann definiert ψ bezüglich β und X auf $\mathcal{K}$ einen Operator $\psi^{\mathcal{K}}$ wie folgt. (Streng genommen müssten wir $\psi^{\mathcal{K}}_{\beta,X}$ schreiben, der Einfachheit halber schreiben wir jedoch lediglich $\psi^{\mathcal{K}}$.)

$$\psi^{\mathcal{K}} : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V),\, U \mapsto \{v \in V \,|\, \mathcal{K}, \beta[X \mapsto U], v \models \psi\}.$$

Dabei bedeutet $\mathcal{K}, \alpha, v \models \psi$ für eine Belegung $\alpha : A \to \mathcal{P}(V)$ der Variablen natürlich gerade, dass ψ in $\mathcal{K}$ im Knoten v gilt, wenn die Aussagenvariablen $Y \in A$, die in ψ vorkommen, gemäß α interpretiert werden. Das heißt eine Menge $U \subseteq V$

wird abgebildet auf die Menge derjenigen Knoten v in $\mathcal{K}$, so dass ψ in v gilt, wenn die atomare Proposition X mit U interpretiert wird und alle anderen Variablen gemäß der vorher festgelegten Interpretation β interpretiert werden.

Wir wollen also nun Formeln der Form $\mu X\psi$ und $\nu X\psi$ erlauben, wobei $\mu X\psi$ in einem Knoten v von $\mathcal{K}$ gelten soll, wenn v im kleinsten Fixpunkt von $\psi^{\mathcal{K}}$ liegt und entsprechend $\nu X\psi$ in v gelten soll, wenn v im größten Fixpunkt von $\psi^{\mathcal{K}}$ liegt. Nun muss natürlich der Operator $\psi^{\mathcal{K}}$ nicht notwendigerweise einen Fixunkt besitzen. Man beachte aber, dass $\mathcal{P}(V)$ bezüglich der Inklusionsbeziehung $\subseteq$ ein vollständiger Verband ist. Ist also $\psi^{\mathcal{K}}$ *monoton*, so wissen wir damit, dass $\psi^{\mathcal{K}}$ einen größten Fixpunkt $\mathrm{gfp}(\psi^{\mathcal{K}})$ und einen kleinsten Fixpunkt $\mathrm{lfp}(\psi^{\mathcal{K}})$ besitzt und dass diese die Grenzwerte der Ketten $x^\alpha \subseteq V$, $\alpha \in \mathrm{On}$ beziehungsweise $y^\alpha \subseteq V$, $\alpha \in \mathrm{On}$ sind.

Damit genügt es also, syntaktische Eigenschaften zu finden, welche uns garantieren, dass für eine Formel ψ der Modallogik, der Operator $\psi^{\mathcal{K}}$ monoton ist. Eine Möglichkeit, dies zu garantieren ist zu fordern, dass die Variable X in ψ nur positiv auftritt, das heißt jedes Vorkommen von X in ψ ist im Bereich einer geraden Anzahl von Negationssymbolen. Dass die entsprechenden Operatoren tatsächlich monoton sind, beweist man per Induktion über den Formelaufbau, wobei man o.B.d.A. annimmt, dass die gegebene Formel in Negationsnormalform ist und beachtet, dass in dieser Negationsnormalform nach Voraussetzung die Formel $\neg X$ nicht als Teilformel vorkommt.

Bemerkung 2.1. *Ist $\psi \in \mathrm{ML}(\tau \cup A)$ eine modallogische Formel über der Signatur $\tau \cup A$ und $X \in A$ eine Variable die in ψ nur positiv auftritt, so ist $\psi^{\mathcal{K}}$ für jedes Transitionssystem $\mathcal{K}$ der Signatur τ (und jede Belegung β der Aussagenvariablen) monoton.*

Damit sind also für eine modallogische Formel ψ über der Signatur $\tau \cup A$ und ein $X \in A$, welches in ψ nur positiv vorkommt, die Formelbildungsregeln $\mu X\psi$ und $\nu X\psi$ sinnvoll. Die Formeln $\mu X\psi$ und $\nu X\psi$ sind dann Formeln des modalen μ-Kalküls über der Signatur τ (auch wenn ψ noch weitere Variablen enthält, die nicht durch Fixpunktoperatoren gebunden sind). Nun wollen wir allerdings Fixpunkte in Formeln auch verschachtelt zulassen, das heißt, für eine Formel ψ über der Signatur $\tau \cup A$, welche bereits Fixpunktdefinitionen (über Variablen $Y, Z, \ldots \in A$) enthält, und eine Variable $X \in A$, welche in ψ nur positiv auftritt, wollen wir auch $\mu X\psi$ und $\nu X\psi$ als Formeln zulassen.

Um nachzuweisen, dass auch dies sinnvoll ist, zeigt man nun per Induktion über den Aufbau der Formeln ψ des modalen μ-Kalküls $L_\mu(\tau)$ Folgendes. Nehmen wir an, dass für alle echten Teilformeln φ von ψ die Semantik von φ bereits definiert ist und dass für jede Variable $X \in A$ die in φ nur positiv vorkommt, alle Transitionssysteme $\mathcal{K} = (V, \tau^{\mathcal{K}})$ und alle Belegungen $\beta : A \to \mathcal{P}(V)$ der Operator $\varphi^{\mathcal{K}}$ monoton ist. Dann kann man auch die Semantik von ψ definieren und für jede Variable $X \in A$ die in ψ nur positiv vorkommt, alle Transitionssysteme $\mathcal{K} = (V, \tau^{\mathcal{K}})$ und alle Belegungen $\beta : A \to \mathcal{P}(V)$ ist der Operator $\psi^{\mathcal{K}}$ monoton. Dabei nimmt man wiederum an, dass die Formel in Negationsnormalform ist und beachtet, dass für eine Varibale $X \in A$, die in ψ nur positiv vorkommt, die Formel $\neg X$ nach Voraussetzung nicht in ψ auftritt. Die interessanten Fälle sind dabei natürlich die Fixpunktdefinitionen. Wir schauen uns den Fall des Operators μ hier exemplarisch an. Sei also $\psi = \mu Y\varphi$

für eine Formel $\varphi \in L_\mu(\tau)$ und eine Variable $Y \in A$, die in φ nur positiv vorkommt, so dass φ die Induktionsvoraussetzungen erfüllt. Ferner sei $X \in A$ eine Variable, die in ψ nur positiv vorkommt, und es sei $\mathcal{K} = (V, \tau^\mathcal{K})$ ein Transitionssystem. Nach Induktionvoraussetzung ist dann für jede Belegung $\beta : A \to \mathcal{P}(V)$ der Variablen der Operator $\varphi^\mathcal{K}$ bezüglich der Variablen X und bezüglich der Variablen Y monoton. Also haben wir eine Semantik für ψ. Proposition 0.4 liefert ferner, dass auch der Operator $\psi^\mathcal{K}$ bezüglich der Variablen X monoton ist, wie behauptet.

Auf Basis dieser Überlegungen können wir nun Syntax und Semantik des modalen μ-Kalküls in voller Allgemeinheit definieren.

Definition 2.1. Es sei $\tau = \{E_a \mid a \in A\} \cup \{P_i \mid i \in I\}$ eine Signatur von Transitionssystemen und A sei eine Menge von Aussagenvariablen X mit $A \cap \tau = \emptyset$. Der *modale μ-Kalkül* $L_\mu(\tau)$ ist induktiv wie folgt definiert.

- Für $i \in I$ ist $P_i \in L_\mu(\tau)$ und für $X \in A$ ist $X \in L_\mu(\tau)$.
- Ist $\varphi \in L_\mu(\tau)$ eine Formel und ist $a \in A$, so sind $\langle a \rangle\varphi$, $[a]\varphi \in L_\mu(\tau)$.
- Sind φ, $\psi \in L_\mu(\tau)$ Formeln, so sind $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi \in L_\mu(\tau)$.
- Ist $\psi \in L_\mu(\tau)$ eine Formel und $X \in A$ eine Aussagenvariable, die in ψ nur positiv vorkommt, so sind $\mu X\psi$, $\nu X\psi \in L_\mu(\tau)$.

Ein Vorkommen einer Aussagenvariablen $X \in A$ in einer Formel $\psi \in L_\mu(\tau)$ heißt *frei*, wenn X nicht im Bereich eines Fixpunktoperators μX oder νX liegt. Eine Formel $\psi \in L_\mu(\tau)$ heißt *geschlossen*, wenn sie keine freien Aussagenvariablen enthält.

Die Semantik dieser Formeln ist nun gerade gemäß unseren Vorüberlegungen definiert. Dazu müssen wir natürlich lediglich die Semantik für die Fixpunktoperatoren festlegen, in allen anderen Fällen ist die Semantik wie für die Modallogik definiert. Wir betrachten also eine Formel $\psi \in L_\mu(\tau)$ und eine Aussagenvariable $X \in A$, die in ψ nur positiv vorkommt. Ist dann $\mathcal{K} = (V, \tau^\mathcal{K})$ eine Kripkestruktur, $v \in V$ ein Knoten in $\mathcal{K}$ sowie $\beta : A \to \mathcal{P}(V)$ eine Belegung der Variablen, so legen wir Folgendes fest.

- $\mathcal{K}, \beta, v \models \mu X\psi$, wenn $v \in \mathrm{lfp}(\psi^\mathcal{K})$ gilt.
- $\mathcal{K}, \beta, v \models \nu X\psi$, wenn $v \in \mathrm{gfp}(\psi^\mathcal{K})$ gilt.

Folgende Eigenschaft des modalen μ-Kalküls folgert man leicht aus Satz 0.3.

Bemerkung 2.2. *(Dualität von μ und ν) Ist $\psi \in L_\mu$ eine Formel und $X \in A$ eine Variable, die in ψ nur positiv vorkommt, so gilt $\mu X\psi \equiv \neg\mu X\neg\psi[X/\neg X]$.*

Wir betrachten im Folgenden ausschließlich *geschlossene* μ-Kalkül Formeln. Zunächst sehen wir uns nun einige erste Beispiele an.

Beispiel 2.1. *Wir betrachten die Formel $\psi = P \vee \langle a \rangle X \in L_\mu(\{P\})$ und die zugehörige Definition $\mu X\psi = \mu X(P \vee \langle a \rangle X)$ des kleinsten Fixpunktes des Operators $\psi^\mathcal{K}$ für ein Transitionssystem $\mathcal{K} = (V, E_a^\mathcal{K}, P^\mathcal{K})$. Wir berechnen nun für ein gegebenes solches Transitionssystem $\mathcal{K} = (V, E_a^\mathcal{K}, P^\mathcal{K})$ diesen kleinsten Fixpunkt induktiv. Zunächst ist per Definition $x^0 = \emptyset$. Dann haben wir $x^1 = \{v \in V \mid (\mathcal{K}, \emptyset), v \models \psi\} = P^\mathcal{K}$, da ein Knoten natürlich keine Nachfolger in der leeren Menge haben kann.*

Die nächste Stufe der Fixpunktkonstruktion ist $x^2 = P^{\mathcal{K}} \cup \{v \in V \mid (\mathcal{K}, P^{\mathcal{K}}) \models \langle a \rangle X\} = P^{\mathcal{K}} \cup \{v \in V \mid \exists u \in P^{\mathcal{K}} : (v,u) \in E_a^{\mathcal{K}}\} = \{v \in V \mid$ *es gibt von* v *aus einen* a*-Pfad der Länge* ≤ 1 *nach* $P^{\mathcal{K}}\}$*. Allgemein gilt für* $n < \omega$*, dass* $x^{n+1} = P^{\mathcal{K}} \cup \{v \in V \mid (\mathcal{K}, x^n) \models \langle a \rangle X\} = \{v \in V \mid$ *es gibt von* v *aus einen* a*-Pfad der Länge* $\leq n$ *nach* $P^{\mathcal{K}}\}$ *ist. Also haben wir* $x^\omega = \bigcup_{n<\omega} x^n = \{v \in V \mid$ *es gibt von* v *aus einen* a*-Pfad nach* $P^{\mathcal{K}}\}$*. Wie man leicht sieht, ist damit nun* $\psi^{\mathcal{K}}(x^\omega) = x^\omega$ *und also gilt* $x^\omega = x^\infty = \mathrm{lfp}(\psi^{\mathcal{K}})$*. Das Abschlussordinal von* $\psi^{\mathcal{K}}$ *ist nun gerade die kleinste Ordinalzahl* $\alpha \leq \omega$*, so dass für alle* $v \in V$ *ein* $n < \alpha$ *existiert, so dass von* v *aus ein* a*-Pfad der Länge höchstens* n *nach* P *existiert. Natürlich kann im Allgemeinen* $\alpha < \omega$ *gelten.*

Beispiel 2.2. *Wir betrachten die Formel* $\psi = \Box X$ *und die zugehörige Definition* $\mu X \psi = \mu X(\Box X)$ *des kleinsten Fixpunktes des Operators* $\psi^{\mathcal{K}}$ *für ein Transitionssystem* $\mathcal{K} = (V, E^{\mathcal{K}})$*. Wir betrachten nun für ein gegebenes solches Transitionssystem* $\mathcal{K} = (V, E^{\mathcal{K}})$ *die induktive Konstruktion des kleinsten Fixpunktes von* $\psi^{\mathcal{K}}$*. Zunächst ist per Definition* $x^0 = \emptyset$ *und da kein Knoten einen Nachfolger in der leeren Menge haben kann folgt* $x^1 = \{v \in V \mid$ *v ist ein Terminalknoten*$\}$*. Allgemein hat man* $x^{n+1} = \{v \in V \mid$ *alle Pfade von* v *aus haben höchstens die Länge* $n\}$*. Schließlich haben wir* $x^\omega = \bigcup_{n<\omega} x^n = \{v \in V \mid$ *es gibt ein* $n < \omega$*, so dass alle Pfade von* v *die Länge höchstens* n *haben*$\}$*.*

Ist nun $\mathcal{K}$ *endlich verzweigt, so ist* x^ω *ein Fixpunkt von* $\psi^{\mathcal{K}}$*, wie man sich leicht überlegen kann. In unbeschränkt verzweigten Transitionssystem* $\mathcal{K}$ *kann es hingegen Knoten* v *geben, so dass alle Pfade von* v *aus endlich sind, die Länge dieser Pfade aber unbeschränkt ist. Solche Knoten kommen erst im* $\omega + 1$*-ten Schritt der Fixpunktiteration hinzu, Vorgänger solcher Knoten im* $\omega + 2$*-ten Schritt und so weiter. Allgemein sei für eine Ordinalzahl* $\alpha \in \mathrm{On}$ *das Transitionssystem* $\mathcal{K}_\alpha = (\alpha, >)$ *definiert durch* $u > v$ *genau dann, wenn* $v < u$*. Dann ist* $\mathcal{K}_\alpha$ *derart, dass in der induktiven Konstruktion des kleinsten Fixpunktes von* $\psi^{\mathcal{K}_\alpha}$ *der Fixpunkt tatsächlich erst in der Stufe* α *erreicht wird, das heißt das Abschlussordinal von* $\psi^{\mathcal{K}_\alpha}$ *ist* α*. (Man zeigt dazu per Induktion nach* β *leicht, dass* $x^\beta = \beta$ *ist für alle* $\beta \leq \alpha$*.)*

Auf Basis dieser Überlegungen erkennt man nun, dass für jedes Transitionssystem $\mathcal{K} = (V, E^{\mathcal{K}})$ *der kleinste Fixpunkt von* $\psi^{\mathcal{K}}$ *gerade* $\mathrm{lfp}(\psi^{\mathcal{K}}) = x^\infty = \{v \in V \mid$ *alle Pfade von* v *aus sind endlich*$\} =: U$ *ist. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass* U *tatsächlich ein Fixpunkt von* $\psi^{\mathcal{K}}$ *ist. Um zu zeigen, dass* U *auch der kleinste Fixpunkt von* $\psi^{\mathcal{K}}$ *ist, genügt es zu zeigen, dass es keinen Fixpunkt von* $\psi^{\mathcal{K}}$ *gibt, der echt in* U *enthalten ist (da* $\psi^{\mathcal{K}}$ *einen eindeutig bestimmten kleinsten Fixpunkt besitzt, muss dann* U *dieser Fixpunkt sein). Sei also* $U' \subsetneq U$ *eine echte Teilmenge von* U*. Wir behaupten, dass es dann ein* $v \in U \setminus U'$ *geben muss, so dass alle Nachfolger von* v *in* U' *liegen. Nehmen wir dazu an, dass dies nicht der Fall ist. Sei dann* $v \in U \setminus U'$ *beliebig. Wir konstruieren einen unendlichen Pfad von* v *aus, so dass alle Knoten auf diesem Pfad in* $U \setminus U'$ *liegen. Dazu wählen wir zunächst einen Nachfolger* v_0 *von* v *in* $V \setminus U'$*, welcher nach Annahme existiert. Da* $v \in U$ *ist, ist damit aber offensichtlich auch* $v_0 \in U$ *und also gilt* $v_0 \in U \setminus U'$*. Ist dann ein Pfad* $v \to v_0 \to \ldots \to v_n$ *mit* $v_i \in U \setminus U'$ *für alle* $i \leq n$ *für ein* $n < \omega$ *konstruiert, so setzen wir diesen Pfad fort, indem wir einen Nachfolger* v_{n+1} *von* v_n *in* $V \setminus U'$ *wählen, der wie zuvor notwendigerweise in* $U \setminus U'$ *liegt, da* v_n *nach Induktionsvoraussetzung* *in U liegt. Auf diese Art erhalten wir den gewünschten unendlichen Pfad. Dass ein unendlicher Pfad von v aus existiert, ist nun aber ein Widerspruch zu $v \in U$. Also gibt es in der Tat ein $v \in U \setminus U'$, so dass alle Nachfolger von v in U' liegen. Damit ist aber gerade $v \in \psi^{\mathcal{K}}(U')$, also ist U' kein Fixpunkt von $\psi^{\mathcal{K}}$.*

Beispiel 2.3. *Als drittes Beispiel betrachten wir schließlich die Formel $\psi = \Diamond 1 \wedge \Box X$ und die zugehörige Definition $\nu X \psi = \nu X(\Diamond 1 \wedge \Box X)$ des größten Fixpunktes des Operators $\psi^{\mathcal{K}}$ für ein Transitionssystem $\mathcal{K} = (V, E^{\mathcal{K}})$. Wir betrachten nun für ein gegebenes solches Transitionssystem die induktive Konstruktion des größten Fixpunktes von $\psi^{\mathcal{K}}$. Wir haben $y^0 = V$ und offensichtlich gilt $y^1 = \{v \in V \mid v \text{ ist kein Terminalknoten}\}$. Allgemein gilt $y^n = \{v \in V \mid \text{kein Pfad von } v \text{ aus erreicht nach} < n \text{ Schritten einen Terminalknoten}\}$. Damit haben wir $y^\omega = \bigcap_{n<\omega} y^n = \{v \in V \mid \text{von } v \text{ aus ist kein Terminalknoten erreichbar}\}$ und wie man leicht sieht gilt $y^\omega = y^\infty = \mathrm{gfp}(\psi^{\mathcal{K}})$.*

Wir betrachten nun die infinitären Modallogiken $\mathrm{ML}_{\kappa\omega}(\tau)$ für beliebige Kardinalzahlen κ und Signaturen τ von Transitionssystemen, welche die Modallogik auf die gleiche Art und Weise erweitern, wie die infinitären Logiken $L_{\kappa\omega}$ die Logik erster Stufe erweitern. Das heißt, ist $\Phi \subseteq \mathrm{ML}_{\kappa\omega}$ eine Menge von Formeln mit $|\Phi| < \kappa$, so sind auch die unendliche Konjunktion $\bigwedge \Phi$ sowie die unendliche Disjunktion $\bigvee \Phi$ Formeln der Logik $\mathrm{ML}_{\kappa\omega}(\tau)$. Es ist dann wiederum $\mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau) := \bigcup_{\kappa \in \mathrm{Cn}} \mathrm{ML}_{\kappa\omega}(\tau)$.

Satz 2.1. *Es seien $\mathcal{K} = (V, \tau^{\mathcal{K}})$ sowie $\mathcal{K}' = (V', \tau^{\mathcal{K}'})$ Transitionssysteme über der Signatur τ und es seien $v \in V$ sowie $v' \in V'$. Dann gilt $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$ genau dann, wenn $\mathcal{K}, v$ und $\mathcal{K}', v'$ die gleichen $\mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau)$-Formeln erfüllen.*

Beweis. Die Bisimulationsinvarianz von $\mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau)$ zeigt man völlig analog zur Bisimulationsinvarianz der Modallogik per Induktion über den Formelaufbau. Nehmen wir nun an, dass $\mathcal{K}, v$ und $\mathcal{K}', v'$ die gleichen $\mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau)$-Formeln erfüllen. Wir setzen $Z := \{(u, u') \in V \times V' \mid \mathcal{K}, u \text{ und } \mathcal{K}', u' \text{ erfüllen die gleichen } \mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau)\text{-Formeln}\}$ und wir behaupten, dass Z eine Bisimulation ist. Sei dazu $(u, u') \in Z$ beliebig. Dass u und u' die gleichen atomaren Propositionen erfüllen folgt aus der Definition von Z. Wir zeigen nun, dass Z die Hin-Eigenschaft erfüllt, die Her-Eigenschaft zeigt man völlig analog. Sei also $a \in A$ eine Aktion und sei $w \in V$ mit $(u, w) \in E_a^{\mathcal{K}}$. Wir betrachten nun die Menge $S_a := \{w' \in V' \mid (u', w') \in E_a^{\mathcal{K}'}\}$ aller a-Nachfolger von u' in $\mathcal{K}'$ und wir nehmen an, dass es kein $w' \in S_a$ gibt, so dass $(w, w') \in Z$ ist. Dann gibt es nach Definition von Z für alle $w' \in S_a$ eine Formel $\varphi_{w'} \in \mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau)$, so dass $\mathcal{K}', w' \models \varphi_{w'}$ und $\mathcal{K}, w \models \neg\varphi_{w'}$ gilt. Wir setzen nun $\psi := \bigvee\{\varphi_{w'} \mid w' \in S_a\} \in \mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau)$. Dann gilt $\mathcal{K}', u' \models [a]\psi$ und $\mathcal{K}, u \models \neg[a]\psi$, im Widerspruch zu $(u, u') \in Z$. Also gibt es ein $w' \in S_a$ mit $(w, w') \in Z$ womit die Hin-Eigenschaft bewiesen ist. $\Box$

Insbesondere ist damit also $\mathrm{ML}_{\infty\omega}$ bisimulationsinvariant. Wir wollen nun zeigen, dass sich der modale μ-Kalkül für jede feste Kardinalzahl κ über der Klasse aller Transitionssysteme der Kardinalität $< \kappa$ in die infinitäre Logik $\mathrm{ML}_{\infty\omega}$ einbetten lässt. Insbesondere folgt daraus die Bisimulationsinvarianz von L_μ.

Satz 2.2. *Sei $\kappa \in \mathrm{Cn}$ und sei τ eine Signatur von Transitionssystemen. Dann gibt es zu jeder Formel $\psi \in L_\mu(\tau)$ eine Formel $\tilde{\psi} \in \mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau)$, so dass für alle Transitionssysteme $\mathcal{K} = (V, \tau^{\mathcal{K}})$ mit $|V| < \kappa$ und alle $v \in V$ genau dann $\mathcal{K}, v \models \psi$ gilt, wenn $\mathcal{K}, v \models \tilde{\psi}$ gilt.*

Beweis. Wir definieren die Übersetzung der Formeln $\psi \in L_\mu(\tau)$ in Formeln $\tilde{\psi} \in \mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau)$ induktiv über den Aufbau von ψ. Wir übersetzen zunächst atomare Formeln P in P. (Man beachte, dass wir ausschließlich geschlossene Formeln betrachten, also keine atomaren Formeln der Form X für $X \in A$ auftreten.) Ferner übersetzen wir $\langle a \rangle \varphi$ in $\langle a \rangle \tilde{\varphi}$, $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ in $\tilde{\varphi}_1 \wedge \tilde{\varphi}_2$ sowie $\neg\varphi$ in $\neg\tilde{\varphi}$.

Aufgrund der Dualität von μ und ν genügt es nun für die Übersetzung der Fixpunktoperatoren, den Fall $\psi = \mu X \varphi$ zu betrachten. Wir definieren dazu per Induktion über α eine Folge $(\varphi^\alpha)_{\alpha \in \mathrm{On}}$ von (geschlossenen) Formeln $\varphi^\alpha \in \mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau)$ wie folgt. Zunächst sei $\varphi^0 = 0$. Ist nun $\alpha \in \mathrm{On}$ beliebig und φ^α bereits konstruiert, so gibt es per Induktionsvoraussetzung eine Formel $\tilde{\varphi} \in \mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau \cup \{X\})$, welche in allen Transitionssystemen $\mathcal{K} = (V, \tau^{\mathcal{K}}, X^{\mathcal{K}})$ mit $|V| < \kappa$ äquivalent ist zu $\varphi \in L_\mu(\tau \cup \{X\})$ und wir definieren $\varphi^{\alpha+1} := \tilde{\varphi}[X/\varphi^\alpha] \in \mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau)$. Ist schließlich $\alpha \in \mathrm{On}$ ein Limesordinal und ist φ^β für alle $\beta < \alpha$ bereits konstruiert, so setzen wir $\varphi^\alpha := \bigvee\{\varphi^\beta \mid \beta < \alpha\}$.

Wir definieren nun $\tilde{\psi} := \varphi^{\kappa^+} = \bigvee\{\varphi^\alpha \mid \alpha < \kappa^+\} \in \mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau)$ und wir wollen zeigen, dass $\tilde{\psi}$ in allen Transitionssystemen der Kardinalität höchstens κ äquivalent ist zu ψ. Sei dazu also $\mathcal{K} = (V, \tau^{\mathcal{K}})$ ein Transitionssystem mit $|V| < \kappa$ und sei $v \in V$. Sei ferner $(x^\alpha)_{\alpha \in \mathrm{On}}$ die induktive Konstruktion von $\mathrm{lfp}(\varphi^{\mathcal{K}})$ und sei $u^\alpha := \{u \in V \mid \mathcal{K}, u \models \varphi^\alpha\}$. Per Induktion nach α zeigen wir nun, dass $x^\alpha = u^\alpha$ für alle $\alpha \in \mathrm{On}$ gilt. Zunächst ist $x^0 = u^0 = \emptyset$. Ist nun $\alpha \in \mathrm{On}$ und gilt $x^\alpha = u^\alpha$, so ist $x^{\alpha+1} = \{v \in V \mid (\mathcal{K}, x^\alpha), v \models \varphi\} = \{v \in V \mid (\mathcal{K}, u^\alpha), v \models \varphi\} = \{v \in V \mid \mathcal{K}, v \models \tilde{\varphi}[X/\varphi^\alpha]\} = \{v \in V \mid \mathcal{K} \models \varphi^{\alpha+1}\} = u^{\alpha+1}$. Ist schließlich α ein Limesordinal, so gilt $x^\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} x^\beta = \bigcup_{\beta<\alpha} u^\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha}\{v \in V \mid \mathcal{K} \models \varphi^\beta\} = \{v \in V \mid \mathcal{K} \models \bigvee\{\varphi^\beta \mid \beta < \alpha\}\} = \{v \in V \mid \mathcal{K} \models \varphi^\alpha\} = u^\alpha$.

Da $|V| < \kappa$ gilt, gibt es nun ein $\alpha \in \mathrm{On}$ mit $\alpha < \kappa^+$, so dass $x^\alpha = x^\infty = \mathrm{lfp}(\varphi^{\mathcal{K}})$. Gilt nun also $\mathcal{K}, v \models \psi = \mu X \varphi$, das heißt $v \in x^\beta = u^\beta$ für ein $\beta < \alpha$, so folgt $\mathcal{K}, v \models \varphi^\beta$ für ein $\beta < \alpha$ und also $\mathcal{K}, v \models \varphi^{\kappa^+}$. Gilt umgekehrt $\mathcal{K}, v \models \varphi^{\kappa^+}$, das heißt $\mathcal{K}, v \models \varphi^\beta$ für ein $\beta < \kappa^+$, so haben wir $v \in u^\beta = x^\beta$ für ein $\beta < \kappa^+$ und also $v \in \mathrm{lfp}(\varphi^{\mathcal{K}})$. □

Somit gilt insbesondere, dass es für jede Formel $\varphi \in L_\mu$ des modalen μ-Kalküls eine Formel $\tilde{\varphi} \in \mathrm{ML}_{\infty\omega}$ gibt, so dass φ und $\tilde{\varphi}$ auf allen *endlichen* Transitionssystemen äquivalent sind.

Auf die Einschränkung auf Strukturklassen beschränkter Kardinalität kann im Allgemeinen nicht verzichtet werden, da zum Beispiel die Formel $\varphi = \mu X \Box X$ welche in einem Knoten v genau dann gilt, wenn alle Pfade von v aus endlich sind, zu keiner Formel $\tilde{\varphi} \in \mathrm{ML}_{\infty\omega}$ äquivalent ist. Um dies einzusehen, erinnert man sich daran, dass wir bewiesen haben, dass die Klasse aller Wohlordnungen in $L_{\infty\omega}$ nicht definierbar ist. Nun ist zu einer linearen Ordnung $(A, <)$ das Transitionssystem $(A, >)$ mit $a > b$ genau dann, wenn $b < a$ derart, dass $(A, <)$ genau dann eine Wohlordnung ist, wenn für jeden Knoten in $(A, >)$ alle Pfade von diesem Knoten aus endlich sind. Könnten wir also diese Eigenschaft in $\mathrm{ML}_{\infty\omega}$ ausdrücken, so würden wir über die

Einbettung von $\mathrm{ML}_{\infty\omega}$ in $L_{\infty\omega}$ eine Formel in $L_{\infty\omega}$ erhalten, welche die Klasse aller Wohlordnungen definiert.

Korollar 2.1. *Ist τ eine Signatur von Transitionssystemen, $\psi \in L_\mu(\tau)$, sind $\mathcal{K} = (V, \tau^{\mathcal{K}})$ sowie $\mathcal{K}' = (V', \tau^{\mathcal{K}'})$ Transitionssysteme und $v \in V$ sowie $v' \in V'$ mit $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$, so gilt $\mathcal{K}, v \models \psi$ genau dann, wenn $\mathcal{K}', v' \models \psi$ gilt.*

Beweis. Nach Satz 0.5 gibt es eine Formel $\tilde{\psi} \in \mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau)$, so dass $\mathcal{K}, v \models \tilde{\psi}$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{K}, v \models \psi$ gilt und $\mathcal{K}', v' \models \tilde{\psi}$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{K}', v' \models \psi'$ gilt. Da $\mathrm{ML}_{\infty\omega}(\tau)$ bisimulationsinvariant ist und $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$ gilt, haben wir $\mathcal{K}, v \models \tilde{\psi}$ genau dann, wenn $\mathcal{K}', v' \models \tilde{\psi}$, also folgt $\mathcal{K}, v \models \psi$ genau dann, wenn $\mathcal{K}', v' \models \psi$. $\square$

Schließlich wollen wir noch zeigen, dass der modale μ-Kalkül L_μ in die monadische Logik zweiter Stufe MSO einbettbar ist. Mit der soeben bewiesenen Bisimulationsinvarianz des μ-Kalküls folgt daraus, dass L_μ eine Teilmenge des bisimulationsinvarianten Fragments von MSO ist. Wir haben bereits erwähnt, dass L_μ sogar genau das bisimulationsinvariante Fragment von MSO ist, das heißt es gilt auch, dass jede MSO-Formel, welche bisimulationsinvariant ist, äquivalent zu einer L_μ-Formel ist (Janin und Walukiewicz).

Satz 2.3. *Es sei τ eine Signatur von Transitionssystemen. Für jede Formel $\psi \in L_\mu(\tau)$ gibt es eine Formel $\psi^*(x) \in \mathrm{MSO}(\tau)$ mit einer freien Variablen, so dass für jedes Transitionssystem $\mathcal{K} = (V, \tau^{\mathcal{K}})$ und alle $v \in V$ genau dann $\mathcal{K}, v \models \varphi$ gilt, wenn $\mathcal{K} \models \varphi^*(x)$ gilt.*

Beweis. Wir definieren die Übersetzung induktiv über den Aufbau von ψ. Wir übersetzen zunächst atomare Formeln P in Px. (Man beachte, dass wir ausschließlich geschlossene Formeln betrachten, also keine atomaren Formeln der Form X für $X \in A$ auftreten.) Ferner übersetzen wir $\langle a \rangle \varphi$ in $\exists y(E_a xy \wedge \varphi^*(y))$, $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ in $\varphi_1^*(x) \wedge \varphi_2^*(x)$ sowie $\neg\varphi$ in $\neg\varphi^*(x)$.

Aufgrund der Dualität von μ und ν genügt es nun für die Übersetzung der Fixpunktoperatoren, den Fall $\psi = \mu X \varphi$ zu betrachten. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Formel $\varphi^*(x) \in \mathrm{MSO}(\tau \cup \{X\})$, so dass für alle Transitionssysteme $\mathcal{K} = (V, \tau^{\mathcal{K}}, X^{\mathcal{K}})$ und alle $v \in V$ genau dann $\mathcal{K}, v \models \varphi$ gilt, wenn $\mathcal{K} \models \varphi^*(v)$ gilt. Wir definieren nun $\psi^*(x) := \forall X(\forall y(Xy \leftrightarrow \varphi^*(y)) \rightarrow Xx)$. Dann gilt für alle Transitionssystem $\mathcal{K} = (V, \tau^{\mathcal{K}})$ und alle $v \in V$ genau dann $\mathcal{K} \models \psi^*(v)$, wenn $v \in U$ für jeden Fixpunkt $U \subseteq V$ von $\varphi^{\mathcal{K}}$ gilt, das heißt, wenn $v \in \mathrm{lfp}(\varphi^{\mathcal{K}})$ ist. Also gilt $\mathcal{K} \models \psi^*(v)$ genau dann, wenn $\mathcal{K}, v \models \psi$ gilt. $\square$

3 Least Fixed Point Logic

Das Konzept der least fixed point logic LFP ist das gleiche wie das des modalen μ-Kalküls, wobei hier nun Fixpunkte zur vollen Logik erster Stufe hinzugefügt werden statt lediglich zum bisimulationsinvarianten Fragment von FO. Wir betrachten also eine Signatur τ sowie eine Menge $\mathcal{R}$ von Relationsvariablen R mit $\mathcal{R} \cap \tau = \emptyset$, wobei jedes $R \in \mathcal{R}$ eine feste Stelligkeit $k < \omega$ hat. Sei nun $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in FO(\tau \cup \mathcal{R})$ eine Formel erster Stufe über der Signatur $\tau \cup \mathcal{R}$ mit freien Variablen $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und

$\overline{y} = (y_1, \dots, y_r)$ wobei jedes $R \in \mathcal{R}$ als Relationssymbol aufgefasst wird. Sei weiter $R \in \mathcal{R}$ eine beliebige n-stellige Relationsvariable, $\mathfrak{A} = (A, \tau^{\mathfrak{A}})$ eine τ-Struktur, $\beta : \mathcal{R} \to \bigcup_{k<\omega} \mathcal{P}(A^k)$ eine Belegung der Relationsvariablen $R \in \mathcal{R}$ sowie $\alpha : \mathrm{VAR} \to A$ eine Belegung der Elementvariablen. Wie zuvor bezeichne $\beta[S \mapsto U]$ für ein $S \in \mathcal{R}$ und $U \subseteq A^k$ (wobei k die Stelligkeit von S ist) diejenige Belegung der Variablen $\beta[S \mapsto U] : \mathcal{R} \to \bigcup_{k<\omega} \mathcal{P}(A^k)$ mit $\beta[S \mapsto U](T) = \beta(T)$ für alle $T \in \mathcal{R} \setminus \{S\}$ und $\beta[S \mapsto U](S) = U$. Dann definiert φ bezüglich β, α und R auf $\mathfrak{A}$ wie auch im Falle des μ-Kalküls einen Operator $\varphi^{\mathfrak{A}}$ wie folgt. (Streng genommen müssten wir hier $\varphi^{\mathfrak{A}}_{\beta,\alpha,R}$ schreiben.)

$$\varphi^{\mathfrak{A}} : \mathcal{P}(A^n) \to \mathcal{P}(A^n),\ U \mapsto \{\overline{a} \in A^n \mid \mathfrak{A}, \beta[R \mapsto U], \alpha \models \varphi(\overline{a}, \overline{y})\}.$$

Das heißt eine Relation $R \subseteq V$ wird abgebildet auf die Relation bestehend aus denjenigen Tupeln $\overline{a} \subseteq A$, so dass $\varphi(\overline{x})$ auf $\overline{a}$ zutrifft, wenn das Relationsymbol R mit U interpretiert wird und alle anderen Variablen gemäß den vorher festgelegten Interpretationen β und α interpretiert werden. Wie auch im Fall des μ-Kalküls sagen wir nun, dass das Relationssymbol R in φ nur positiv auftritt, wenn jedes Vorkommen von R in φ im Bereich einer geraden Anzahl von Negationssymbolen ist. Auch hier zeigt man per Induktion über den Aufbau von φ (mit φ o.B.d.A. in Negationsnormalform), dass der Operator $\varphi^{\mathfrak{A}}$ monoton ist, wenn R in φ nur positiv auftritt. In diesem Fall besitzt dann also $\varphi^{\mathfrak{A}}$ einen kleinsten und einen größten Fixpunkt und diese Fixpunkte sind die Grenzwerte der Ketten $x^\alpha \in \mathcal{P}(A^n)$, $\alpha \in \mathrm{On}$ beziehungsweise $y^\alpha \in \mathcal{P}(A^n)$, $\alpha \in \mathrm{On}$.

Hat man sich dies überlegt, so kann man sich wie im Falle des μ-Kalküls überlegen, dass auch verschachtelte Fixpunktdefinitionen möglich sind. Man zeigt dazu auch hier per Induktion über den Aufbau der Formeln φ der least fixed point logic $\mathrm{LFP}(\tau)$ Folgendes. Nehmen wir an, dass für alle Teilformeln ψ von φ die Semantik von ψ bereits definiert ist und dass für jede Variable $R \in \mathcal{R}$, die in ψ nur positiv vorkommt, alle Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \tau^{\mathfrak{A}})$ und alle Belegungen $\beta : \mathcal{R} \to \bigcup_{k<\omega} \mathcal{P}(A^k)$ sowie $\alpha : \mathrm{VAR} \to A$ der Operator $\psi^{\mathfrak{A}}$ monoton ist. Dann kann man auch die Semantik von φ definieren und für jede Variable $R \in \mathcal{R}$, die in φ nur positiv vorkommt, alle Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \tau^{\mathfrak{A}})$ und alle Belegungen $\beta : \mathcal{R} \to \bigcup_{k<\omega} \mathcal{P}(A^k)$ sowie $\alpha : \mathrm{VAR} \to A$ ist der Operator $\varphi^{\mathfrak{A}}$ monoton. Auf Basis dieser Überlegungen können wir nun Syntax und Semantik der least fixed point logic LFP in voller Allgemeinheit definieren.

Definition 3.1. Es sei τ eine Signatur und $\mathcal{R}$ sei eine Menge von Relationsvariablen R mit $\mathcal{R} \cap \tau = \emptyset$. Die *least fixed point logic* $\mathrm{LFP}(\tau)$ ist induktiv wie folgt definiert. Die Menge $T(\tau)$ der τ-Terme ist dabei definiert wie für die Logik erster Stufe.

- Sind $t, t' \in T(\tau)$, so ist $t = t' \in \mathrm{LFP}(\tau)$.
- Sind $t_1, \dots, t_n \in T(\tau)$ und ist $R \in \tau$ ein n-stelliges Relationssymbol oder $R \in \mathcal{K}$ eine n-stellige Relationsvariable, so ist $Rt_1 \dots t_n \in \mathrm{LFP}(\tau)$.
- Sind φ, $\psi \in \mathrm{LFP}(\tau)$ Formeln, so sind $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi \in \mathrm{LFP}(\tau)$.
- Ist $\psi(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{LFP}(\tau)$ eine Formel mit freien Variablen $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ sowie $\overline{y} = (y_1, \dots, y_r)$, $R \in \mathcal{R}$ eine Relationsvariable der Stelligkeit n, die in ψ nur positiv vorkommt, und sind ferner $\overline{t} = (t_1, \dots, t_n) \in T(\tau)$ τ-Terme, so sind $[\mathrm{lfp}\, R\overline{x}\psi](\overline{t})$ sowie $[\mathrm{gfp}\, R\overline{x}\psi](\overline{t}) \in \mathrm{LFP}(\tau)$.

Ein Vorkommen einer Variablen $R \in \mathcal{R}$ in einer Formel $\psi \in \mathrm{LFP}(\tau)$ heißt *frei*, wenn R nicht im Bereich eines Fixpunktoperators $\mathrm{lfp}\, R$ oder $\mathrm{gfp}\, R$ liegt. Eine Formel $\psi \in \mathrm{LFP}(\tau)$ heißt *geschlossen*, wenn sie keine freien Variablen enthält.

Die Semantik ist nun gerade gemäß unseren Vorüberlegungen definiert. Dazu müssen wir natürlich lediglich die Semantik für die Fixpunktoperatoren festlegen, in allen anderen Fällen ist die Semantik wie für die Logik erster Stufe definiert. Wir betrachten also eine Formel $\psi(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{LFP}(\tau)$ mit den freien Variablen $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_r)$, eine n-stellige Relationsvariable $R \in \mathcal{R}$, die in ψ nur positiv vorkommt sowie τ-Terme $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_n)$. Ist dann $\mathfrak{A} = (A, \tau^{\mathfrak{A}})$ eine τ-Struktur, $\beta : \mathcal{R} \to \bigcup_{k<\omega} \mathcal{P}(A^k)$ eine Belegung der Relationsvariablen und ist $\alpha : \mathrm{VAR} \to A$ eine Belegung der Elementvariablen, so legen wir Folgendes fest.

- $\mathfrak{A}, \beta, \alpha \models [\mathrm{lfp}\, R\overline{x}\psi](\overline{t})$, wenn $\overline{t}^{\mathfrak{A},\alpha} \in \mathrm{lfp}(\psi^{\mathfrak{A}})$ gilt.
- $\mathfrak{A}, \beta, \alpha \models [\mathrm{gfp}\, R\overline{x}\psi](\overline{t})$, wenn $\overline{t}^{\mathfrak{A},\alpha} \in \mathrm{gfp}(\psi^{\mathfrak{A}})$ gilt.

Die folgende Eigenschaft von LFP folgert man leicht aus Satz 0.3.

Bemerkung 3.1. *(Dualität von* lfp *und* gfp*) Ist τ eine Signatur, $\psi(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{LFP}(\tau)$ eine Formel mit freien Variablen $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ sowie $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $R \in \mathcal{R}$ eine n-stellige Relationsvariable, die in ψ nur positiv vorkommt und sind $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ τ-Terme, so gilt* $[\mathrm{lfp}\, R\overline{x}\psi](\overline{t}) \equiv \neg[\mathrm{gfp}\, R\overline{x}\neg\psi[R/\neg R]](\overline{t})$.

Wir betrachten im Folgenden ausschließlich *geschlossene* LFP-Formeln. Wir wollen uns nun überlegen, dass man die transitive Hülle $\mathrm{TC}(E)$ (transitive closure) der Kantenrelation E eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ in LFP definieren kann. Dabei ist die transitive Hülle von E definiert als $\mathrm{TC}(E) = \{(u, v) \mid$ es gibt Elemente $u_0, \ldots, u_n \in V$ mit $u = u_0$, $v = u_n$ und $(u_i, u_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \ldots, n-1$ $\}$. Das heißt, $\mathrm{TC}(E)$ besteht aus denjenigen Paaren (u, v) von Knoten, so dass v von u aus (durch einen gerichteten Pfad) erreichbar ist. Da wir wissen, dass sich Erreichbarkeit in der Logik erster Stufe nicht ausdrücken lässt, haben wir damit bereits gezeigt, dass LFP eine echte Erweiterung von FO ist.

Um eine solche Formel zu finden, überlegt man sich, dass ein Knoten v von einem Knoten u aus genau dann erreichbar ist, wenn $v = u$ ist oder wenn es einen Nachfolger w von u gibt, so dass v von w aus erreichbar ist. Das heißt $\mathrm{TC}(E)$ ist ein Fixpunkt des Ausdrucks $x = y \vee \exists z(Exz \wedge Tzy)$. Damit meinen wir, dass $\mathrm{TC}(E)$ ein Fixpunkt des durch diese Formel definierten Fixpunktoperators ist. Nun ist der zugehörige Operator monoton, also gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten Fixpunkt. Setzt man ferner eine echte Teilmenge $T \subsetneq \mathrm{TC}(E)$ in den Ausdruck ein, so betrachten wir ein Paar $(u, v) \in V \times V$ mit $(u, v) \in \mathrm{TC}(E) \setminus T$, so dass die Distanz $d(u, v)$ minimal ist unter allen Paaren aus $\mathrm{TC}(E) \setminus T$. (Die leere Menge kann offensichtlich nur ein Fixpunkt sein, wenn V leer ist.) Ist dann $d(u, v) = 0$, das heißt $u = v$, so ist T offensichtlich kein Fixpunkt des obigen Ausdrucks. Ist $d(u, v) > 0$, so gibt es ein $w \in V$ mit $(u, w) \in E$, $(w, v) \in \mathrm{TC}(E)$ und $d(w, v) < d(u, v)$. Also gilt $(w, v) \in T$ und also ist T kein Fixpunkt des Ausdrucks. Somit ist $\mathrm{TC}(E)$ der kleinste Fixpunkt.

Setzen wir also $\varphi(u, v) := [\mathrm{lfp}\, Txy(x = y \vee \exists z(Exz \wedge Tzy))](u, v)$, so gilt $G \models \varphi(u, v)$ genau dann, wenn $(u, v) \in \mathrm{TC}(E)$ gilt. In der iterativen Konstruktion des

Fixpunktes berechnet man dann sukzessive $x^0 = \emptyset$ und $x^{i+1} = E^i$, wobei E^i für $i < \omega$ gegeben ist durch $E^i = \{(u,v) \in V \times V \mid$ es gibt einen Pfad der Länge höchstens i von u nach $v\}$. Dann ist $x^\omega = \mathrm{TC}(E)$ der gesuchte Fixpunkt.

Man kann die transitive Hülle von E allerdings auch durch einen Fixpunkt einer einstelligen Relation beschreiben, indem man zu einem festen Knoten u die Menge $u\mathrm{TC}(E)$ aller von u aus erreichbaren Knoten definiert. Dazu überlegt man sich, dass ein Knoten v genau dann von u aus erreichbar ist, wenn $u = v$ ist oder es einen Vorgänger w von v gibt, so dass w von u aus erreichbar ist. Das heißt, $u\mathrm{TC}(E)$ ist Fixpunkt des Ausdrucks $x = u \vee \exists z(Ezx \wedge Tz)$ und man überlegt sich wie zuvor, dass es sogar der kleinste Fixpunkt ist. Setzen wir also $\varphi(u,v) := [\mathrm{lfp}\, Tx(x = u \vee \exists z(Ezx \wedge Tz))](v)$, so gilt $G \models \varphi(u,v)$ genau dann, wenn v von u aus erreichbar ist, das heißt genau dann, wenn $(u,v) \in \mathrm{TC}(E)$. Entsprechend kann man auch die Menge $\mathrm{TC}(E)v$ aller Knoten von denen aus v erreichbar ist auf diese Art definieren.

Völlig analog zum Fall des modalen μ-Kalküls kann man nun auch für LFP zeigen, dass für jede feste Kardinalzahl κ zu jeder LFP-Formel eine $L_{\infty\omega}$-Formel existiert, so dass die beiden Formeln auf allen Strukturen der Kardinalität höchstens κ äquivalent sind.

Satz 3.1. *Sei $\kappa \in \mathrm{Cn}$ und sei τ eine Signatur. Dann gibt es zu jeder Formel $\psi(\overline{x}) \in \mathrm{LFP}(\tau)$ eine Formel $\tilde{\psi} \in L_{\infty\omega}(\tau)$, so dass für alle τ-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \tau^{\mathfrak{A}})$ mit $|A| < \kappa$ und alle $\overline{a} \subseteq A$ genau dann $\mathfrak{A} \models \psi(\overline{a})$ gilt, wenn $\mathfrak{A} \models \tilde{\psi}(\overline{a})$ gilt.*

Das gleiche Argument wie im Fall des modalen μ-Kalküls liefert nun auch hier, dass auf die Beschränkung auf Strukturklassen beschränkter Kardinalität im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann, das heißt wir zeigen, dass die Klasse aller Wohlordnungen in LFP definierbar ist. Dazu überlegt man sich, dass eine lineare Ordnung $(A, <)$ genau dann eine Wohlordnung ist, wenn für alle Elemente $a \in A$ alle absteigenden Ketten von a aus endlich sind. Dies ist für ein festes a genau dann der Fall, wenn für alle Vorgänger b von a alle absteigenden Ketten von b aus endlich sind. Also ist die Menge WF aller Elemente a, so dass alle absteigenden Ketten von a aus endlich sind (die Menge aller wohlfundierten Elemente) ein Fixpunkt des Ausdrucks $\forall y(y < x \rightarrow Wy)$. Der zugehörige Operator ist monoton, also gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten Fixpunkt. Setzt man nun ferner eine echte Teilmenge $W \subsetneq \mathrm{WF}$ in den Ausdruck ein, so besitzt $\mathrm{WF} \setminus W$ ein kleinstes Element a. (Die leere Menge kann offensichtlich nur dann ein Fixpunkt sein, wenn A leer ist.) Alle Vorgänger von a liegen wieder in WF und damit in W, also ist W kein Fixpunkt des Ausdrucks. Folglich ist WF der kleinste Fixpunkt.

Setzen wir nun also $\psi_{\mathrm{wo}} := \varphi_{\mathrm{lin}} \wedge \forall x[\mathrm{lfp}\, Wx(\forall y(y < x \rightarrow Wy))](x)$, wobei φ_{lin} eine Formel ist die ausdrückt, dass $<$ eine lineare Ordnung ist, so gilt für alle $<$-Strukturen $\mathfrak{A}$ genau dann $\mathfrak{A} \models \psi_{\mathrm{wo}}$, wenn $\mathfrak{A}$ eine Wohlordnung ist.

Wir wollen nun abschließend noch einige Eigenschaften von LFP zusammentragen. Zunächst ist die Struktur $(\omega, 0, S)$ in $\mathrm{LFP}(0, S)$ bis auf Isomorphie axiomatisierbar. Um dies einzusehen überlegt man sich, dass $\{S^n(0) \mid n < \omega\}$ offensichtlich der kleinste Fixpunkt des Ausdrucks $x = 0 \vee \exists y(Ry \wedge Sy = x)$ (bezüglich der Relationsvariablen R) ist. Also wird $(\omega, 0, S)$ durch $\forall x \forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y) \wedge (\forall x Sx \neq$

$0) \wedge \forall x[\mathrm{lfp}\, Rx(x = 0 \vee \exists y(Ry \wedge Sy = x))](x)$ bis auf Isomorphie axiomatisiert. (Die ersten beiden Formeln in der Konjunktion sind wiederum gerade die ersten beiden Peano-Axiome.) Also gilt der aufsteigende Satz von Löwenheim-Skolem für LFP nicht:

Bemerkung 3.2. *Es gibt einen Satz $\varphi \in \mathrm{LFP}$, der ein unendliches Modell hat und der nur abzählbare Modelle besitzt.*

Wir wollen uns nun überlegen, dass auch der Kompaktheitssatz für LFP nicht gilt. Dazu zeigen wir, dass es einen LFP(S)-Satz φ gibt, so dass φ beliebig große endliche Modelle besitzt, aber kein unendliches Modell. Aus dem Kompaktheitssatz folgt nun aber leicht, dass im Gegenteil jede Satzmenge Φ mit beliebig großen endlichen Modellen auch ein unendliches Modell besitzen muss. (Jede endliche Teilmenge von $\Phi \cup \{\exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j \,|\, n < \omega\}$ ist nach Voraussetzung erfüllbar und mit dem Kompaktheitssatz dann auch die ganze Menge.)

Satz 3.2. *Es gibt einen Satz $\varphi \in \mathrm{LFP}(S)$, wobei S ein einstelliges Funktionssymbol ist, so dass φ beliebig große endliche Modelle besitzt, aber kein unendliches Modell.*

Beweis. Wir setzen zunächst $\psi(x, z) := [\mathrm{lfp}\, Rx(x = z \vee \exists y(Ry \wedge Sy = x))](x)$. Ist dann $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur und $a \in A$, so ist der kleinste Fixpunkt des Ausdrucks $x = a \vee \exists y(Ry \wedge Sy = x)$ (bezüglich R) gerade $\{(S^{\mathfrak{A}})^n(a) \,|\, n < \omega\}$. Also gilt für beliebige Elemente $a, b \in A$ genau dann $\mathfrak{A} \models \psi(b, a)$, wenn es ein $n < \omega$ gibt, so dass $(S^{\mathfrak{A}})^n(a) = b$ ist. Wir definieren nun $\varphi := \forall x \exists y(Sy = x) \wedge \exists x \forall y \psi(y, x)$. Somit gilt $\mathfrak{A} \models \varphi$ genau dann, wenn $S^{\mathfrak{A}}$ surjektiv ist und es ein $a \in A$ gibt mit $A = \{(S^{\mathfrak{A}})^n(a) \,|\, n < \omega\}$. Für beliebige $n < \omega$ ist nun $\mathfrak{A} = (\{1, \ldots, n\}, S^{\mathfrak{A}})$ mit $S^{\mathfrak{A}}(k) = k + 1$ für $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ und $S^{\mathfrak{A}}(n) = 1$ eine Struktur mit $\mathfrak{A} \models \varphi$, also hat φ beliebig große endliche Modelle. Hingegen hat φ kein unendliches Modell. Ist nämlich $\mathfrak{A} = (A, S^{\mathfrak{A}})$ eine S-Struktur mit unendlichem Universum A, so dass ein $a \in A$ existiert mit $A = \{(S^{\mathfrak{A}})^n(a) \,|\, n < \omega\}$, so gilt $a \notin \mathrm{Bild}(S^{\mathfrak{A}})$ also ist $S^{\mathfrak{A}}$ nicht surjektiv. Wäre nämlich $a \in \mathrm{Bild}(S^{\mathfrak{A}})$, so wäre $a = S^{\mathfrak{A}}(b)$ für ein $b \in A$. Wegen $A = \{(S^{\mathfrak{A}})^n(a) \,|\, n < \omega\}$ ist aber $b = (S^{\mathfrak{A}})^n(a)$, also wäre $(S^{\mathfrak{A}})^{n+1}(a) = a$. Damit wäre aber $|\{(S^{\mathfrak{A}})^n(a) \,|\, n < \omega\}| \leq n$ im Widerspruch dazu, dass A unendlich ist und $A = \{(S^{\mathfrak{A}})^n(a) \,|\, n < \omega\}$ gilt. Also haben wir $\mathfrak{A} \not\models \varphi$, womit die Behauptung vollständig bewiesen ist. □

Korollar 3.1. *Es gibt eine unerfüllbare Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{LFP}(S)$, wobei S ein einstelliges Funktionssymbol ist, so dass jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.*

Beweis. Nach Satz 0.8 gibt es einen Satz $\varphi \in \mathrm{LFP}(S)$ der beliebig große endliche Modelle besitzt, aber kein unendliches Modell. Wir definieren nun die Satzmenge Φ durch $\Phi := \{\varphi\} \cup \{\exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j\}$ und sind fertig. □

Wir wollen nun noch zwei Eigenschaften von LFP erwähnen, die wir hier nicht beweisen. Zum einen gilt der absteigende Satz von Löwenheim-Skolem für LFP.

Satz 3.3. *Sei $\varphi \in \mathrm{LFP}$ ein erfüllbarer Satz. Dann hat φ ein abzählbares Modell.*

Insbesondere folgt daraus, dass es einen Satz $\varphi \in L_{\infty\omega}(\tau)$ für eine geeignete Signatur τ gibt, der zu keinem Satz $\psi \in \mathrm{LFP}(\tau)$ äquivalent ist. Wir können zum Beispiel für τ eine überabzählbare Menge von Konstantensymbolen wählen und φ als die Konjunktion über alle Sätze $c \neq d$ für paarweise verschiedene $c, d \in \tau$. Trivialerweise hat φ dann kein abzählbares Modell.

Ferner gilt Folgendes. Ist $\mathcal{K}$ eine LFP-definierbare Klasse von endlichen τ- Strukturen für eine Signatur τ (das heißt es gibt einen Satz $\varphi \in \mathrm{LFP}(\tau)$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ für alle endlichen τ-Strukturen $\mathfrak{A}$), so ist $\mathcal{K}$ Polynomzeit- entscheidbar (das heißt es gibt einen Polynomzeit- Algorithmus, der für eine gegebene endliche τ- Struktur $\mathfrak{A}$ entscheidet, ob $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ ist). Ist nun ferner $< \in \tau$ und ist für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ die Interpreration $<^{\mathfrak{A}}$ von $<$ in $\mathfrak{A}$ eine Ordnung, so gilt sogar die Umkehrung, das heißt ist $\mathcal{K}$ Polynomzeit-entscheidbar, so ist $\mathcal{K}$ in LFP definierbar. Man schreibt diese Tatsache oft wie folgt.

Satz 3.4. *Auf geordneten Strukturen gilt* LFP = PTIME.

Vollkommen analog zur Einbettung von L_μ in die monadische Logik zweiter Stufe können wir natürlich auch LFP in die volle Logik zweiter Stufe einbetten. Weiterhin können wir L_μ in LFP einbetten indem wir die Einbettung der Modallogik in die Logik erster Stufe fortsetzen. Wir haben also insgesamt folgendes Bild.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{ML} & \subseteq & L_\mu & \subseteq & \mathrm{MSO} \\ \rotatebox{90}{$\supseteq$} & & \rotatebox{90}{$\supseteq$} & & \rotatebox{90}{$\supseteq$} \\ \mathrm{FO} & \subseteq & \mathrm{LFP} & \subseteq & \mathrm{SO} \end{array}$$