

## 1. Übung Algorithmic Model Theory

Abgabe: bis Mittwoch, 28. April um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

### Aufgabe 1

Beweisen Sie:

- (a) Wenn  $L_1 \leq L_2$  und  $L_2$  rekursiv aufzählbar (r.e.) ist, dann ist auch  $L_1$  r.e.
- (b) Wenn  $L$  r.e. ist und  $L \leq \bar{L}$  gilt, dann ist  $L$  entscheidbar.
- (c)  $L$  ist genau dann entscheidbar, wenn  $L$  und  $\bar{L}$  r.e. sind.

### Aufgabe 2

Sind folgende Probleme entscheidbar?

- (a)  $L_a^n = \{\rho(M)\#\rho(x) : M \text{ hält auf der Eingabe } x \text{ nach höchstens } n \text{ Schritten}\}$
- (b)  $L_b^n = \{\rho(M)\#\rho(x) : M \text{ hält auf der Eingabe } x \text{ nach wenigstens } n \text{ Schritten}\}$
- (c)  $L_c = \{\rho(M) : L(M) = \Gamma^*\}$

### Aufgabe 3

(a) Welche der folgende Paare von Entscheidungsproblemen sind rekursiv untrennbar?

(i)  $\text{EQ} = \{\rho(M)\#\rho(M') \mid L(M) = L(M')\}$  und  
 $\text{NEQ}^2 = \{\rho(M)\#\rho(M') \mid f_m \neq f_{M'} \text{ und } L(M) \neq L(M')\};$

(ii)  $\text{NEQ} = \{\rho(M)\#\rho(M') \mid L(M) \neq L(M')\}$  und  
 $\text{EQ}^\# = \{\rho(M)\#\rho(M') \mid M \text{ macht mehr Schritte auf } 010 \text{ als } M' \text{ und } L(M) = L(M')\}.$

(b) Gibt es zwei unentscheidbare disjunkte Probleme  $P_1$  und  $P_2$ , die nicht rekursiv untrennbar sind?

### Aufgabe 4

Welche der folgenden Probleme sind rekursiv aufzählbar, welche co-rekursiv aufzählbar?

- (a)  $\{\varphi \in \text{FO} \mid \text{alle endlichen Modelle von } \varphi \text{ haben gerade Größe}\}$
- (b)  $\{\varphi \in \text{FO} \mid \text{es existiert } \psi \in \text{FO} \text{ mit } |\psi| < |\varphi|, \text{ so dass } \varphi \text{ und } \psi \text{ auf denselben endlichen Strukturen gelten}\}$