Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2014

2. Übung Algorithmische Modelltheorie II

Abgabe: bis Montag, 5. Mai um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1

Der aus der klassischen Modelltheorie bekannte *Satz von Łos-Tarski* (siehe MaLo2 Skript) besagt, dass für jeden Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) φ bleibt unter Substrukturen erhalten, d.h. wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ eine Substruktur von $\mathfrak{A}$ ist, dann gilt auch $\mathfrak{B} \models \varphi$.

ii) φ is äquivalent zu einem universell quantifizierten Satz, d.h. es gibt $\psi = \forall \overline{x} \vartheta(\overline{x}) \in \mathrm{FO}(\tau)$, mit $\vartheta(\overline{x})$ quantorenfrei, so dass $\varphi \equiv \psi$ gilt.

Zeigen Sie, dass der Satz von Łos-Tarski über endlichen Strukturen nicht gilt.

Hinweis: Sei τ eine Signatur, mit 2-stelligen Prädikaten $<$, R , Konstanten c_{min}, c_{max} und 1-stelligem Prädikat P. Betrachten Sie den Satz $\varphi := \varphi_0 \wedge (\varphi_1 \rightarrow \exists x Px)$, wobei φ_0 ausdrücke, dass $<$ eine lineare Ordnung mit erstem Element c_{min}, letztem Element c_{max} und R eine Teilmenge der Nachfolgerrelation bezüglich $<$ ist, und $\varphi_1 := \forall x(x < c_{max} \rightarrow \exists y Rxy)$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Strukturklassen nicht $\mathrm{FO}_{<\text{-inv}}$-definierbar über endlichen Strukturen sind.

(a) Die Klasse der azyklischen Graphen

(b) Die Klasse der bipartiten Graphen

(c) Die Klasse der 3-färbbaren Graphen

(d) Die Klasse der Graphen, die ein perfektes Matching haben

Hinweis: Zeigen Sie jeweils, dass ansonsten die Klasse $\mathrm{EVEN}_<$ der linearen Ordnungen gerader Länge FO-definierbar wäre.

Aufgabe 3

Ein *(ungeordneter) Binärbaum* ist ein endlicher, gerichteter Baum bei dem jeder Knoten entweder keinen oder genau zwei Nachfolger hat. Die *Tiefe* eines Knotens x ist die Distanz von x zur Wurzel. Ein Binärbaum heißt *vollständig*, wenn jedes Blatt die gleiche Tiefe hat. Die *Höhe* eines Binärbaums ist die maximale Tiefe eines Knotens. Wir stellen Binärbäume als Strukturen über der Signatur $\tau := \{S, D\}$ dar, wobei S als Nachfolgerrelation und D als transitive Hülle von S interpretiert werden.

(a) Geben Sie einen Satz $\gamma \in \mathrm{FO}(\tau)$ an, so dass für jede endliche τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \gamma \Leftrightarrow \mathfrak{A}$ ist ein Binärbaum.

(b) Geben Sie einen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau \cup \{<\})$ an, so dass für jeden *vollständigen* geordneten Binärbaum $(\mathfrak{T}, <)$ gilt: $(\mathfrak{T}, <) \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{T}$ hat gerade Höhe.

(c) Geben Sie einen Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)_{<\text{-inv}}$ an, so dass für jede endliche τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{A}$ ist ein Binärbaum und jedes Blatt von $\mathfrak{A}$ hat gerade Tiefe.