Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2014

3. Übung Algorithmische Modelltheorie II

Abgabe: bis Montag, 12. Mai um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1

(i.) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Modellklassen Hanf-lokal sind.

a) $\mathcal{K}_1 := \{G : G \text{ ist ein } k\text{-zusammenhängender Graph}\}$

Hinweis: Ein Graph heißt *k-zusammenhängend*, falls er nach Entfernung von k beliebigen Kanten immer noch zusammenhängend ist.

b) $\mathcal{K}_2 := \{G : G \text{ ist ein Graph, der gerade viele Kreise der Länge 3 enthält}\}$

c) $\mathcal{K}_3 := \{G : G \text{ ist ein planarer Graph}\}$

(ii.) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden globalen Relationen Gaifman-lokal sind.

a) $(a, b) \in Q_1(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{N} : f^i(a) = f^j(b)$,

für $\mathfrak{A} \in \mathrm{Fin}(\{f\})$, wobei f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist.

b) $(a, b, c, d) \in Q_2(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \mathfrak{A}$ ist ein Graph in dem es genau so viele Pfade der Länge 5 von a nach b wie Pfade der Länge 6 von c nach d gibt,

für $\mathfrak{A} \in \mathrm{Fin}(\{E\})$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

c) $(a, b) \in Q_3(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow$ es gibt einen orientierten E_0-Pfad von a nach b und jeder Knoten ist von jedem anderen über einen orientierten E_1-Pfad der Länge höchstens 4 erreichbar,

für $\mathfrak{A} \in \mathrm{Fin}(\{E_0, E_1\})$, wobei E_0, E_1 2-stellige Relationssymbole sind.

Aufgabe 2

(a) Konstruieren Sie für alle $k, n \in \mathbb{N}, \mathfrak{A} \in \mathrm{Fin}(\tau)$, $\overline{a} \in A^n$ eine Formel $\varphi^k_{\mathfrak{A},\overline{a}}(\overline{x}) \in \mathrm{FO}(\tau)$, so dass für alle $\mathfrak{B} \in \mathrm{Fin}(\tau), \overline{b} \in B^n$ gilt:

$$\mathfrak{B} \models \varphi^k_{\mathfrak{A},\overline{a}}(\overline{b}) \Leftrightarrow \mathcal{N}^k_{\mathfrak{A}}(\overline{a}) \cong \mathcal{N}^k_{\mathfrak{B}}(\overline{b})$$

(b) Konstruieren Sie für alle $k, n \in \mathbb{N}, \mathfrak{A} \in \mathrm{Fin}(\tau)$, $\overline{a} \in A^n$ eine Formel $\psi^k_{\mathfrak{A},\overline{a}}(\overline{x}) \in \mathrm{FO}(\tau)$, so dass für alle $\mathfrak{B} \in \mathrm{Fin}(\tau), \overline{b} \in B^n$ gilt:

$$\mathfrak{B} \models \psi^k_{\mathfrak{A},\overline{a}}(\overline{b}) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \overline{a}) \rightleftarrows_k (\mathfrak{B}, \overline{b})$$

Aufgabe 3

Der *Lokalitätsrang $l(\varphi)$ einer Formel* $\varphi(\overline{x}) \in \mathrm{FO}$ ist der Lokalitätsrang $l(Q_\varphi)$ der von φ definierten globalen Relation Q_φ mit $\overline{a} \in Q_\varphi(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$, für $\mathfrak{A} \in \mathrm{Fin}(\tau)$.

Konstruieren Sie Formeln $\varphi_n(x) \in \mathrm{FO}$ mit $\mathrm{qr}(\varphi_n) \leq n$ und $l(\varphi_n) \geq 2^n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.