Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2014

4. Übung Algorithmische Modelltheorie II

Abgabe: bis Montag, 19. Mai um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1

Eine Satz φ ist in *Gaifman-Form*, falls φ eine Boolesche Kombination von Sätzen der Form

$$\exists x_1 \dots \exists x_s \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le s} d_{>2r}(x_i, x_j) \wedge \bigwedge_{i=1}^{s} \alpha^{(r)}(x_i) \right)$$

ist, wobei

- $d_{>2r}(x_i, x_j)$ ausdrückt, dass die Distanz zwischen x_i und x_j im Gaifman-Graphen größer $2r$ ist
- $\alpha^{(r)}(x_i)$ r-lokal um x_i ist, d.h. nur auf die r-Nachbarschaft $N^r(x_i)$ von x_i relativierte Quantoren $\exists y \in N^r(x_i)$, $\forall y \in N^r(x_i)$ enthält

Sei $\psi_k := \exists x_1 \dots \exists x_k \forall y \bigvee_{i=1}^{k} (y = x_i \vee Ex_i y)$.

(a) Geben Sie für jedes $k \geq 1$ einen Satz $\varphi_k \in \mathrm{FO}(\{E\})$ in Gaifman-Form an, so dass für jeden *zusammenhängenden* Graphen G gilt: $G \models \varphi_k \Leftrightarrow G \models \psi_k$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass jeder zusammenhängende Graph der ψ_k erfüllt einen Durchmesser von höchstens $3k$ haben kann.

(b) Geben Sie für jedes $k \geq 1$ einen Satz $\vartheta_k \in \mathrm{FO}(\{E\})$ in Gaifman-Form an, so dass für jeden Graphen G gilt: $G \models \vartheta_k \Leftrightarrow G \models \psi_k$.

Aufgabe 2

Wir verallgemeinern den Begriff des Knotengrads von Graphen auf endliche Strukturen:
Sei τ eine relationale Signatur und $\mathfrak{A} \in \mathrm{Fin}(\tau)$. Für $R \in \tau, a \in A$, $1 \leq i \leq \mathrm{ar}(R)$ sei

$$\deg_{R^{\mathfrak{A}},i}(a) := |\{(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_{\mathrm{ar}(R)}) \in R^{\mathfrak{A}} : a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_{\mathrm{ar}(R)} \in A\}|$$

Die Menge $\mathrm{degset}(\mathfrak{A})$ der Knotengrade von $\mathfrak{A}$ ist definiert als

$$\mathrm{degset}(\mathfrak{A}) := \{\deg_{R^{\mathfrak{A}},i}(a) : a \in A, R \in \tau, 1 \leq i \leq \mathrm{ar}(R)\}$$

Sei $\mathrm{Fin}_l(\tau) := \{\mathfrak{A} \in \mathrm{Fin}(\tau) : \mathrm{degset}(\mathfrak{A}) \subseteq \{0, 1, \dots, l\}\}$ die Klasse der endlichen τ-Strukturen mit Maximalgrad l.
Wir sagen, dass eine $m \geq 1$-stellige globale Relation Q die *bounded number of degrees property* (BNDP) hat, falls es eine Funktion $f_Q \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, so dass für jedes $l \geq 0$

$$|\mathrm{degset}((A, Q(\mathfrak{A})))| \leq f_Q(l) \text{ für alle } \mathfrak{A} \in \mathrm{Fin}_l(\tau)$$

(a) Zeigen Sie, dass TC mit $\mathrm{TC}(\mathfrak{A}) := \{(a,b) \in A^2 :$ es gibt einen E-Pfad von a nach b in $\mathfrak{A}\}$, für $\mathfrak{A} \in \mathrm{Fin}(\{E\})$ die BNDP nicht hat.

(b) Geben Sie für jede relationale Signatur τ eine Funktion $F_\tau \colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an für die $|\{\mathcal{N}^d_{\mathfrak{A}}(a) : \mathfrak{A} \in \mathrm{Fin}_l(\tau), a \in A\}| \leq F_\tau(d,l)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass es für jedes $d \geq 0$ eine Folge $(n_d(k))_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen gibt, so dass für alle $\mathfrak{A} \in \mathrm{Fin}(\tau), \overline{a}, \overline{b} \in A$ gilt:

$$\overline{a} \approx_{n_d(k)} \overline{b} \Rightarrow \text{ es gibt eine Bijektion } f\colon A^k \to A^k \text{ mit } \overline{ac} \approx_d \overline{b}f(\overline{c}), \text{ für alle } \overline{c} \in A^k$$

Hinweis: Benutzen Sie das Lemma "$\mathfrak{A} \rightleftarrows_d \mathfrak{B}$, $\overline{a} \approx_{3d+1} \overline{b} \Rightarrow \mathfrak{A}, \overline{a} \rightleftarrows_d \mathfrak{B}, \overline{b}$" aus der Vorlesung mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

(d) Beweisen Sie, dass jede Gaifman-lokale globale Relation Q die BNDP hat.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass für eine m-stellige ($m > 0$) globale Relation mit Lokalitätsrang $l(Q) = d$ zwei Elemente $a, b \in A$ den gleichen Knotengrad $\deg_{Q(\mathfrak{A}),1}(a) = \deg_{Q(\mathfrak{A}),1}(b)$ in $(A, Q(\mathfrak{A}))$ haben, wenn es eine Bijektion $f\colon A^{m-1} \to A^{m-1}$ mit $a\overline{c} \approx_d bf(\overline{c})$ für alle $\overline{c} \in A^{m-1}$ gibt, und benutzen Sie b) und c).