Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2014

5. Übung Algorithmische Modelltheorie II

Abgabe: bis Montag, 26. Mai um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass es keinen Satz der Form $\exists P_1 \dots \exists P_d \psi$ mit 1-stelligen Prädikaten $P_1, \dots, P_d$ und $\psi \in \mathrm{FO}(\{E, P_1, \dots, P_d\})$ gibt, so dass für alle endlichen Graphen G gilt

$$G \models \exists P_1 \dots \exists P_d \psi \Leftrightarrow \text{G ist zusammenhängend.}$$

Hinweis: Sei $l = hl(\psi)$ der Hanf-Lokalitätsrang von ψ.
Überlegen Sie sich, dass ab einer bestimmten Größe jede $\{P_1, \dots, P_d\}$-Expansion $(\mathcal{D}_m, P_1, \dots, P_d)$ eines Kreises $\mathcal{D}_m = (\{0, 1 \dots, m-1\}, \{(i, i+1 \mod m) : 0 \leq i \leq m\})$ zwei Knoten mit disjunkten und isomorphen l-Nachbarschaften enthält.

Aufgabe 2

Sei τ eine relationale Signatur. $\mathrm{Fin}_l(\tau)$ bezeichne wie in Aufgabe 2 von Übungsblatt 4 die Klasse der endlichen τ-Strukturen mit Maximalgrad l. Es sei $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ ein Satz in Gaifman-Normalform. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass das Auswertungsproblem von φ über $\mathrm{Fin}_l(\tau)$ in Linearzeit entscheidbar ist. Dieses Problem besteht darin zur Eingabe $\mathfrak{A} \in \mathrm{Fin}_l(\tau)$ zu entscheiden, ob $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt. Lösen Sie hierzu die folgenden Teilaufgaben:

(a) Für jede $\mathrm{FO}(\tau)$-Formel $\alpha^{(r)}(x)$, die r-lokal um x, ist läßt sich in konstanter Zeit entscheiden, ob $\mathfrak{A} \models \alpha^{(r)}(a)$ gilt für Eingabe $\mathfrak{A} \in \mathrm{Fin}_l(\tau)$, $a \in A$.

Hinweis: Übung 4, Aufgabe 2(b)

(b) Für alle $l, r \geq 0$ läßt sich in Linearzeit entscheiden, ob es in einem Graphen $G = (V, E, P)$ mit Maximalgrad l und einer Menge von markierten Knoten $P \subseteq V$, s markierte Knoten $x_1, \dots, x_s \in P$ mit paarweiser Distanz $d(x_i, x_j) > 2r$ für $1 \leq i < j \leq s$ gibt.

(c) Beschreiben Sie einen Linearzeit-Algorithmus für das Auswertungsproblem von φ über $\mathrm{Fin}_l(\tau)$.