Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2014

8. Übung Algorithmische Modelltheorie II

Abgabe: bis Montag, 23. Juni um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1

(a) Geben Sie ein CPT-Programm $\mathcal{C}_a$ über der Signatur $\tau = \{E\}$ an, so dass $\mathcal{C}_a$ einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ genau dann akzeptiert, wenn G zusammenhängend ist.

(b) Geben Sie ein CPT-Programm $\mathcal{C}_b$ über der Signatur $\tau = \emptyset$ an, so dass $\mathcal{C}_b$ eine Menge A genau dann akzeptiert, wenn $|A|$ gerade ist.

Aufgabe 2

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen und $\pi : A \to B$ ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Bijektion $\pi : \mathrm{HF}(A) \to \mathrm{HF}(B)$ mit $\pi(x) = \{\pi(y) : y \in x\}$ für Mengen $x \in \mathrm{HF}(A) \setminus A$ ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}^+$ und $\mathfrak{B}^+$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle BGS-Terme $t(x_1, \dots, x_k)$ bzw. BGS-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathrm{HF}(A)$ gilt

$$\pi(t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k)) \;=\; t^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)) \text{ bzw.}$$
$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k) \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \varphi(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k))$$

(c) Sei $\Pi = (\Pi_{\text{step}}(x), \Pi_{\text{halt}}(x), \Pi_{\text{out}}(x))$ ein BGS-Programm und $\sigma : A \to A$ ein Automorphismus von $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass für jedes $x_i \in \mathrm{HF}(A)$, welches in dem Lauf $(x_i) \in (\mathrm{HF}(A))^{\leq\omega}$ von Π auf $\mathfrak{A}$ auftritt, gilt $\sigma(x_i) = x_i$.