Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2014

11. Übung Algorithmische Modelltheorie II

Abgabe: bis Mittwoch, 23. Juli um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1

Zwei Formeln φ, ψ der Dependence Logic $\mathcal{D}(\tau)$ über Signatur τ heißen *schwach logisch äquivalent*, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, falls für alle τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle Teams X mit Variablenbereich $\mathrm{dom}(X) \supseteq \mathrm{frei}(\varphi) \cup \mathrm{frei}(\psi)$, gilt

$$\mathfrak{A} \models_X \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models_X \psi$$

und *stark logisch äquivalent*, geschrieben $\varphi \equiv^* \psi$, falls

$$\varphi \equiv \psi \text{ und } \neg\varphi \equiv \neg\psi$$

gilt.

(a) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen nicht $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \varphi \equiv^* \psi$ gilt.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden logischen Äquivalenzen

(i) $(\varphi \vee \psi) \equiv^* (\psi \vee \varphi)$

(ii) $(\varphi \vee \neg\varphi) \equiv^* \top$

(iii) $((\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta) \equiv^* ((\varphi \wedge \vartheta) \vee (\psi \wedge \vartheta))$

(c) Zeigen Sie, dass für jede Formel $\varphi \in \mathcal{D}$ die schwach logisch äquivalent zu einer FO-Formel ist gilt:

$$\mathfrak{A} \models_X \varphi \Leftrightarrow \text{ für alle } s \in X \text{ gilt: } \mathfrak{A} \models_{\{s\}} \varphi$$

(d) Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils eine logisch äquivalente FO-Formel an oder beweisen Sie dass es keine gibt.

(i) $\forall x_0 \exists x_2 (=\!(x_0, x_2) \wedge x_2 = x_1)$

(ii) $\forall x_1 \exists x_2 (=\!(x_0, x_2) \wedge x_2 = x_1)$

(iii) $\forall x_0 \forall x_1 \exists x_2 (=\!(x_0, x_2) \wedge x_2 = x_1)$

Aufgabe 2

(a) Geben Sie einen Satz $\varphi \in \mathcal{D}(\emptyset)$ an, so dass für jede endliche Struktur $\mathfrak{A}$ gilt :

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \ |A| \text{ ist durch 3 teilbar}$$

(b) Welche Graphen $G = (V, E)$ erfüllen den folgenden Satz?

$$\begin{aligned}\exists x_4 \exists x_5 \forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 (\quad &= (x_2, x_3) \wedge (x_0 = x_2 \to x_1 = x_3) \wedge (x_0 = x_4 \to x_1 = x_4) \\ &\wedge (x_0 = x_5 \to \neg(x_1 = x_4)) \wedge ((x_1 = x_4 \wedge Ex_2x_0) \to x_3 = x_4))\end{aligned}$$