Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

RWTH Aachen, D-52056 Aachen
Tel.:(++49-241) 80 21730
Fax:(++49–241) 8888 215
graedel@informatik.rwth-aachen.de
www-mgi.informatik.rwth-aachen.de/

Entscheidbarkeit und Komplexität von Logikproblemen (SS 01)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 Eine k-Registermaschine ist ähnlich definiert wie eine Turingmaschine, hat aber anstelle des Bandes k Register, von denen jedes eine natürliche Zahl speichern kann. Abhängig vom aktuellen Zustand, und davon, welche Registerinhalte 0 sind, kann die Maschine in einem Schritt den Inhalt der Register um 1 erhöhen oder reduzieren.
Es ist bekannt, dass das Halteproblem für 2-Registermaschinen unentscheidbar ist. (Können Sie dies zeigen?) Übersetzten Sie, analog zum Beweis des Satzes von Trakhtenbrot, dieses Halteproblem in ein Gültigkeitsproblem für möglichst einfache FO-Formeln.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass $\mathit{Sat}(X)$ und $\mathit{Fin}\text{-}\mathit{sat}(X)$ in polynomialer Zeit entscheidbar sind für jede Klasse $X \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$, so dass (a) τ endlich und relational ist, (b) X nur Formeln in Pränex-Normalform enthält, und (c) die Anzahl der Variablen aller $\psi \in X$ beschränkt ist (d.h., es gibt ein festes $k \in \mathbb{N}$, so dass die Länge der Quantorenpräfixe aller $\psi \in X$ höchstens k ist).

Aufgabe 3 ε-FO ist die Erweiterung von FO um den Hilbertschen *Auswahloperator*, (auch: ε-Operator). Zu FO wird die ε-Regel hinzugenommen: Wenn ψ eine Formel ist, x eine Variable, dann ist $\varepsilon x \psi$ ein Term (gelesen: ein x so dass ψ). Die Interpretation von ε über einem Universum A ist gegeben durch eine beliebige Auswahlfunktion $F : \mathcal{P}(A) \to A$, so dass $F(X) \in X$ für alle $X \neq \varnothing$.

(i) Zeigen Sie, dass die Quantoren $\exists$ und $\forall$ mit Hilfe des ε-Operators ausgedrückt werden können.

(ii) Konstruieren Sie ein Unendlichkeitsaxiom in ε-FO, welches nur den ε-Operator, zwei Variablen x und y und das Gleichheitszeichen verwendet (keine Relations- und Funktionssymbole).