Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

RWTH Aachen, D-52056 Aachen
Tel.:(++49-241) 80 21730
Fax:(++49–241) 8888 215
graedel@informatik.rwth-aachen.de
www-mgi.informatik.rwth-aachen.de/

Entscheidbarkeit und Komplexität von Logikproblemen (SS 01)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 Geben Sie eine konservative Reduktion von $[\forall^2, (0,1), (1)]$ auf $[\forall^2, (1), (0,1)]$ an. Damit folgt, dass $[\forall^2, (1), (0,1)]$ eine konservative Reduktionsklasse ist.
Hinweis: Kodieren Sie eine zweistellige Relation P und eine einstellige Funktion f mit einer einstelligen Relation Q und einer zweistelligen Funktion g durch $P = \{(a,b) : g(a,b) \in Q\}$ und $f(a) = g(a,a)$.

Aufgabe 2 $[\forall^2\exists^*]_=$ bezeichne die Menge aller FO-Formeln der Form $\forall x \forall y \exists z_1 \cdots \exists z_m \varphi$ (für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und quantorenfreies, relationales φ). Der Satz von Goldfarb besagt, dass $[\forall^2\exists^*]_=$ eine Reduktionsklasse ist.

Die Schwierigkeit im Beweis dieses Satzes ist der Beweis des folgenden Lemmas.

Lemma. *Es gibt einen erfüllbaren Satz $\varphi \in [\forall^2\exists^*]_=$, welcher (neben andern Symbolen) eine einstellige Relation N und eine zweistellige Relation S enthält, so dass für alle $\mathfrak{A} = (A, N, S, \ldots) \models \varphi$ gilt: N enthält genau ein Element, S ist Graph einer injektiven Funktion auf A, und $\mathfrak{A} \models \forall x \forall y Nx \to \neg Sxy$.*

Zeigen Sie, dass der Satz von Goldfarb aus dem Lemma folgt.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass die Klasse E aller existentiellen FO-Sätze (mit beliebiger Signatur) die Endliche Modell-Eigenschaft hat. Was ist die Komplexität von $Sat(E)$?

Aufgabe 4 * **(Präfixklassen mit endlicher Modell-Eigenschaft in der Theorie einer einstelligen Funktion.)** Zeigen Sie,

(i) Die Klassen $[\exists^*\forall, (0), (1)]_=$ und $[\forall^*, (0), (1)]_=$ haben die endliche Modell-Eigenschaft.

(ii) Die Klassen $[\forall\exists, (0), (1)]_=$ und $[\exists\forall^2, (0), (1)]_=$ enhalten Unendlichkeitsaxiome.