Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

RWTH Aachen, D-52056 Aachen
Tel.:(++49-241) 80 21730
Fax:(++49–241) 8888 215
graedel@informatik.rwth-aachen.de
www-mgi.informatik.rwth-aachen.de/

Entscheidbarkeit und Komplexität von Logikproblemen (SS 01)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 FO^2 hat die Endliche Modell-Eigenschaft auch noch, wenn Konstanten und mehrstellige Relationen zugelassen werden. Zeigen Sie dies für den Fall, dass die Signatur (neben ein- und zweistelligen Relationen) eine 3-stellige Relation R und ein Konstantensymbol c enthält. Hinweis: Eliminieren Sie c und R mit Hilfe von neuen ein- und zweistelligen Relationen.

Aufgabe 2 Konstruieren Sie, für jedes $n \in \mathbb{N}$, einen FO^2-Satz ψ_n, dessen Länge polynomial ist in n und dessen Modelle notwendigerweise ein $(2^n \times 2^n)$-Gitter enthalten.
Ein $(s \times t)$-Gitter ist ein Graph mit Knotenmenge $\{0, \dots, s-1\} \times \{0, \dots, t-1\}$ und Kantenrelationen $H = \{\langle (i,j), (i+1,j) \rangle : i < s-1, j < t\}$ und $V = \{\langle (i,j), (i,j+1) \rangle : i < s, j < t-1\}$.
Hinweis: Die Koordinaten der Punkte haben Binärdarstellungen der Länge n. Beschreiben Sie diese durch einstellige Relationen und axiomatisieren Sie die Nachfolgerrelation auf geeignete Weise.

Aufgabe 3 Sei ψ eine Formel der Form

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \cdots \exists x_n (x_1 \neq x_2 \rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) \wedge \bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j)$$

(wobei φ relational und quantorenfrei sein soll). Wenn $\mathfrak{A} \models \psi$ keine Könige enthält, dann erfüllen die Mengen $P = \{T_{\mathfrak{A}}[a] : a \in A\}$ und $Q = \{T_{\mathfrak{A}}[a,b] : a, b \in A, a \neq b\}$ das Gödel-Kriterium für φ. Wo wird dabei benutzt, dass $\mathfrak{A}$ keine Könige enthält?