Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

RWTH Aachen, D-52056 Aachen
Tel.:(++49-241) 80 21730
Fax:(++49–241) 8888 215
graedel@informatik.rwth-aachen.de
www-mgi.informatik.rwth-aachen.de/

Entscheidbarkeit und Komplexität von Logikproblemen (SS 01)

Übungsblatt 5

Jedes ω-Wort $\alpha \in \Sigma^\omega$ kann mit einer Struktur $\underline{\alpha} := (\omega, succ, (X_a)_{a\in\Sigma})$ identifiziert werden, wobei $X_a = \{n \in \omega : \alpha(n) = a\}$.
Die durch eine S1S-Formel ψ definierte ω-Sprache ist $L_\psi := \{\alpha \in \Sigma^\omega : \underline{\alpha} \models \psi\}$.

Aufgabe 1 Geben Sie zu folgenden ω-Sprachen über dem Alphabet $\Sigma := \{0, 1, 2\}$ jeweils einen Büchi-Automaten und eine S1S-Formel an:

(a) $L_1 := \{\alpha \in \Sigma^\omega : \alpha$ enthält unendlich viele 1, aber nur endlich viele $0\}$,

(b) $L_2 := \{\alpha \in \Sigma^\omega :$ an ungeraden Positionen von α steht nie eine $2\}$.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass jede Büchi-erkennbare ω-Sprache durch eine S1S-Formel definiert wird.

Aufgabe 3 Ein Σ-beschrifteter binärer Baum ist eine Abbildung $t : \{0, 1\}^* \to \Sigma$. Wie bei ω-Wörtern, können wir einen Baum t mit der Struktur $\underline{t} := (\{0, 1\}^*, succ_0, succ_1, (X_a)_{a\in\Sigma})$ identifizieren, wobei $X_a = \{w : t(w) = a\}$. Eine Baumsprache über Σ ist eine Menge von Σ-beschrifteten Bäumen.
Definieren Sie die folgenden Baumsprachen über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ durch S2S-Formeln:

(a) $T_1 := \{t :$ es gibt einen Pfad in t, auf dem unendlich viele b stehen$\}$,

(b) $T_2 := \{t :$ auf allen Pfaden in t stehen unendlich viele $b\}$.

Aufgabe 4 (a) Sei φ ein beliebiger MSO-Satz der Signatur $\{succ, (X_a)_{a\in\Sigma}\}$. Definieren Sie in S1S die ω-Sprache

$$L = \{\alpha \in \Sigma^\omega : \alpha \text{ hat unendlich viele Präfixe } w \text{ mit } \underline{w} \models \varphi.\}$$

(b) Sei $\psi(x, y)$ eine FO-Formel auf Σ-beschrifteten Bäumen. Formalisieren Sie in MSO, dass das Paar (x, y) in der transitiven Hülle der durch ψ definierten Relation liegt.

Aufgabe 5 * Zeigen Sie, dass die ω-Sprache

$$L := \{\alpha \in \{a, b, c\}^\omega : \text{wenn } \alpha \text{ unendliche viele } a \text{ enthält, dann auch unendlich viele } c\}$$

zwar von einem Büchi-Automaten, nicht aber von einem **deterministischen** Büchi-Automaten erkannt werden kann.