Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

RWTH Aachen, D-52056 Aachen
Tel.:(++49-241) 80 21730
Fax:(++49–241) 8888 215
graedel@informatik.rwth-aachen.de
www-mgi.informatik.rwth-aachen.de/

Entscheidbarkeit und Komplexität von Logikproblemen (SS 01)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{ML}$ eine Formelmenge, welche mit jeder Formel auch alle ihre Unterformeln enhält, sei $\mathcal{K} = (V, E, (P_i)_{i\in I}$ ein Transitionssystem und sei $\sim$ die durch Γ-Ununterscheidbarkeit definierte Äquivalenzrelation auf den Zuständen von $\mathcal{K}$. Das heisst, $u \sim v$ wenn für alle $\varphi \in \Gamma$ gilt: $u \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{K}}$ gdw. $v \in [\![\varphi]\!]^{\mathcal{K}}$. Mit $[v]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von v. Eine Filtrierung von $\mathcal{K}$ durch Γ ist ein Transitionssystem $\mathcal{K}^f = (V/\sim, E^f, (P_i^f)_{i\in I})$ so dass gilt:

(1) $P_i^f = \{[v] : v \in P_i\}$

(2) Wenn $(u, v) \in E$, dann ist $([u], [v]) \in E^f$,

(3) Wenn $([u], [v]) \in E^f$, dann gilt für alle Formeln $\Diamond\varphi \in \Gamma$, dass $\mathcal{K}, v \models \varphi \Longrightarrow \mathcal{K}, u \models \Diamond\varphi$, und eine duale Bedingung für Formeln $\Box\varphi \in \Gamma$.

a) Formulieren Sie die duale Bedingung für Formeln $\Box\varphi \in \Gamma$.

b) Ist $\mathcal{K}^f, [v]$ immer bisimilar zu $\mathcal{K}, v$?

c) Beweisen Sie den **Filtrierungssatz**: Sei $\mathcal{K}^f$ eine Filtrierung von $\mathcal{K}$ durch Γ. Für alle $\varphi \in \Gamma$ und alle v gilt: $\mathcal{K}, v \models \varphi$ gdw. $\mathcal{K}^f, [v] \models \varphi$.

d) Konstruieren Sie zu $\mathcal{K}$ und Γ zwei Kantenrelationen E_0, E_1 auf $V/\sim$, welche Filtrierungen von $\mathcal{K}$ definieren, so dass für jede Filtrierung $\mathcal{K}^f$ mit Kantenrelation E^f gilt: $E_0 \subseteq E^f \subseteq E_1$.

d) Leiten Sie daraus einen neuen Beweis für die Endliche Modell-Eigenschaft von ML ab.

Bitte wenden!

Aufgabe 2 PDL ist eine Erweiterung der Modallogik, bestehend aus *Programmen* und *Formeln.* Programme sind verallgemeinerte Aktionen. Die Syntax von PDL ist, ausgehend von Aktionen $a \in A$ und atomaren Aussagen P_i, durch simultane induktive Definitionen für Programme und Formeln gemäss folgenden Regeln definiert:

Programme $\pi ::= a \mid \pi \cup \pi \mid \pi ; \pi \mid \psi ? \mid \pi^*$

Formeln $\psi ::= P_i \mid \psi \vee \psi \mid \neg \psi \mid \langle \pi \rangle \psi.$

Dabei ist $\pi_1 \cup \pi_2$ als nichtdeterministische Wahl, $\pi_1 ; \pi_2$ als sequentielle Komposition, π^* als endliche Iteration und $\psi ?$ als Test zu interpretieren.

a) Was könnte damit genau gemeint sein? Schlagen Sie exakte Definitionen für die Semantik von PDL-Programmen und PDL-Formeln vor.

b) Zeigen Sie, dass PDL-Formeln invariant sind unter Bisimulation.

Aufgabe 3 Gegeben sei eine Struktur $\mathcal{K}$ mit Zuständen $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{N}^3$ und Transitionen $\xrightarrow{\mathrm{Inc}_i}$ bzw. $\xrightarrow{\mathrm{Dec}_i}$ definiert durch

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{Inc}_0} \begin{bmatrix} x_0+1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{Inc}_1} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1+1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{Inc}_2} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2+1 \end{bmatrix}$$

und $\mathrm{Dec}_i = \mathrm{Inc}_i^{-1}$ für alle $i \in \{0, 1, 2\}$. Ferner gelten die Aussagenkonstanten Null_i jeweils an den Zuständen mit 0 in der i-ten Komponente.
Gesucht wird eine PDL-Formel die in $\mathcal{K}$ an einem Zustand (a, b, c) genau dann gilt, wenn $c = a + b$. Schreiben Sie dazu zuerst ein While-Programm, das mit den Transitionen entsprechenden Operationen die Summe überprüft und formalisieren Sie dieses Programm dann in PDL.