Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger, A. Blumensath

SS 2002

1. Übung Endliche Modelltheorie

Abgabe: Donnerstag, den 25. 4. in der Vorlesung

Aufgabe 1

Konstruieren Sie Formeln $\varphi(x_0, \dots, x_{k-1}, y_0, \dots, y_{k-1}) \in \mathrm{FO}(\{<\})$ welche (auf endlichen linearen Ordnungen) folgendes ausdrücken:

(a) $\bar{x} <_{\mathrm{lex}} \bar{y}$.

(b) $\bar{y}$ ist der unmittelbare Nachfolger von $\bar{x}$ bzgl. $<_{\mathrm{lex}}$.

(c) $\bar{x}$ ist das maximale Tupel bzgl. $<_{\mathrm{lex}}$.

Dabei ist $<_{\mathrm{lex}}$ die durch $<$ induzierte lexikographische Ordnung auf k-Tupeln.

Aufgabe 2

In welchen Logiken (FO, MSO, Σ_1^1, SO) können Sie die folgenden Eigenschaften endlicher Graphen definieren? (Σ_1^1 ist die Klasse aller SO-Formeln der Gestalt $\exists R_1 \cdots \exists R_m \varphi$ mit $\varphi \in \mathrm{FO}$.)

(a) G ist ein Baum.

(b) G ist ein Zyklus.

(c) G ist ein vollständiger Graph.

(d) G enthält eine Kopie von H als induzierten Untergraph. Dabei ist H ein beliebiger fest gewählter endlicher Graph.

(e) Alle Zusammenhangskomponenten von G sind gleich groß.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Formel $\varphi(R, x, y) := Exy \vee \exists z(Rxz \wedge Ezy)$. Für jeden Graph $G = (V, E)$ induziert φ einen Operator φ^G, der auf binären Relationen $R \subseteq V \times V$ wie folgt operiert:

$$\varphi^G : R \mapsto \varphi^G(R) := \{\, (a, b) \mid G \models \varphi(R, a, b) \,\}.$$

(a) Ist φ^G monoton, d. h. gilt für $R \subseteq R'$ immer auch $\varphi^G(R) \subseteq \varphi^G(R')$?

(b) Ist φ^G inflationär, d. h. ist $\varphi^G(R) \supseteq R$ für alle R?

(c) Gibt es Fixpunkte von φ^G, d. h. Relationen R mit $R = \varphi^G(R)$? Wenn ja, beschreiben Sie diese.

Aufgabe 4

Sei $\mathfrak{A} = (A, R_1, \dots, R_m)$ eine relationale Struktur und U eine Teilmenge von A. Dann ist $\mathfrak{A}|_U := (U, R_1 \cap U^{r_1}, \dots, R_m \cap U^{r_m})$ die von U induzierte Substruktur von $\mathfrak{A}$. Für jede FO-Formel ψ und jedes einstellige Relationssymbol U, sei $\psi^{(U)}$ die Relativierung von ψ auf U, welche aus ψ konstruiert wird, indem jede Teilformel $\exists x\varphi$ durch $\exists x(Ux \wedge \varphi)$ und jede Teilformel $\forall x\varphi$ durch $\forall x(Ux \rightarrow \varphi)$ ersetzt wird.

Beweisen Sie das *Relativierungslemma*:

$$(\mathfrak{A}, U) \models \psi^{(U)} \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{A}|_U \models \psi.$$