Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger, A. Blumensath

SS 2002

2. Übung Endliche Modelltheorie

Abgabe: Donnerstag, den 2. 5. in der Vorlesung

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Formel $\varphi(R, x) := \forall y(Exy \rightarrow Ry)$. Für jeden Graph $G = (V, E)$ induziert φ einen Operator φ^G auf Mengen $R \subseteq V$:

$$\varphi^G : R \mapsto \varphi^G(R) := \{\, a \mid G \models \varphi(R, a) \,\}.$$

(a) Ist φ^G monoton? Können Sie ein allgemeines hinreichendes Kriterium dafür angeben, daß der von einer Formel $\psi(R, \bar{x})$ induzierte Operator ψ^G für jeden Graphen G monoton ist?

(b) Beschreiben Sie die Folge $(R^n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche durch $R^0 := \emptyset$ und $R^{n+1} := \varphi^G(R^n)$ definiert ist.

(c) Geben Sie einen Graphen G an, für den $R^n = \emptyset$ für alle n, und einen andern Graphen G' für den jeder Knoten in einer Stufe R^n enthalten ist.

(d) Hat der Operator φ^G für jeden Graphen G einen kleinsten Fixpunkt? Wenn ja, beschreiben Sie diesen.

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Es gibt eine Formel $\varphi(x, y) \in \mathrm{FO}(\{f\})$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist, so dass für alle endlichen $\{f\}$-Strukturen (A, f) gilt: $(A, f) \models \varphi(a, b)$ genau dann, wenn $i, j \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $f^i(a) = f^j(b)$.

Aufgabe 3

Die Methode der Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele läßt sich leicht auf andere Logiken übertragen. Definieren Sie Spiele $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ zwischen zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) II gewinnt $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ genau dann, wenn für alle Sätze der Form $\psi = \exists x_1 \cdots \exists x_m \varphi$ mit quantorenfreiem φ gilt, daß $\mathfrak{A} \models \psi$ gdw $\mathfrak{B} \models \psi$.

(b) II gewinnt $\mathcal{G}_{m,n}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ genau dann, wenn für alle Sätze der Form

$$\psi = \exists x_1 \cdots \exists x_m \forall y_1 \cdots \forall y_n \varphi$$

mit quantorenfreiem φ gilt, daß $\mathfrak{A} \models \psi$ gdw $\mathfrak{B} \models \psi$.

(c) II gewinnt $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ genau dann, wenn ein Homomorphismus $h : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ existiert.

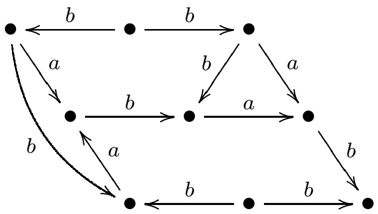
(Die Korrektheit der Spiele braucht nicht bewiesen zu werden.)

Aufgabe 4

(a) Konstruieren Sie den Gaifman-Graphen zur Struktur $\mathfrak{A} := (A, R_2, R_3, R_4)$ mit

$$
\begin{aligned}
A &:= \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\},\\
R_2 &:= \Big\{ \big([\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}]\big),\ \big([\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}]\big),\ \big([\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}]\big) \Big\},\\
R_3 &:= \Big\{ \big([\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}]\big),\ \big([\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}]\big),\ \big([\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}]\big) \Big\},\\
R_4 &:= \Big\{ \big([\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}]\big),\ \big([\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}]\big) \Big\}.
\end{aligned}
$$

(b) Geben Sie bis auf Isomorphie alle 1-Umgebungen im folgenden Transitionssystem an:



(c) Wie nützlich ist der Satz von Gaifman für Strukturen $(A, <, R_0, \ldots, R_m)$ mit einer linearen Ordnung $<$?