Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger, A. Blumensath

SS 2002

3. Übung Endliche Modelltheorie

Abgabe: Donnerstag, den 9. 5. in der Vorlesung

Aufgabe 1

(i) Formalisieren Sie das GAME-Problem durch eine MSO-Formel $\varphi(x)$, so dass für jeden Spielgraphen $\mathcal{G} = (V, V_0, E)$ gilt: $\mathcal{G} \models \varphi(v)$ gdw $(\mathcal{G}, v) \in$ GAME.

(ii) Geben Sie eine Formel $\varphi(R, x) \in$ FO an, so dass der kleinste Fixpunkt des Operators $\varphi^{\mathcal{G}}$ auf jedem Spielgraph die Gewinnmenge von Spieler 0 definiert.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass jedes Spiel $(\mathcal{G}, v)$ mit logarithmischen Platzaufwand in eine aussagenlogische Horn-Formel überführt werden kann, die genau dann unerfüllbar ist, wenn Spieler 0 in $(\mathcal{G}, v)$ eine Gewinnstrategie hat.

Aufgabe 3

Sei φ eine festgelegte FO-Formel. Zeigen Sie, dass sich das Auswertungsproblem für φ wie folgt auf ein *aussagenlogisches* Auswertungsproblem reduzieren lässt: Für jede Struktur $\mathfrak{A}$ und jede Belegung β der freie Variablen in φ kann mit logarithmischem Platzaufand eine aussagenlogische Formel ψ und eine passende Interpretation $\mathcal{I}$ konstruiert werden, so dass $\mathfrak{A}, \beta \models \varphi$ gdw $\mathcal{I}(\psi) = 1$.

Aufgabe 4

In der Vorlesung wurde ein alternierender Algorithmus für das FO-Auswertungsproblem vorgestellt. Adaptieren Sie diesen Algorithmus für FO+C, die Erweiterung der Prädikatenlogik um Zählquantoren mit folgender Semantik:

$$\exists^n x\, \varphi(x, \bar{y}) \quad \text{gdw} \quad \exists x_1 \ldots \exists x_n \Big(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(x_i, \bar{y}) \Big).$$

Hinweis: Benutzen Sie die durch die Eingabe vorgegebene Ordnung auf der Struktur, und beachten Sie, dass es genau dann n Elemente kleiner als x gibt, wenn ein $z < x$ existiert, so dass es noch $n - 1$ Elemente kleiner als z gibt.