Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger, A. Blumensath

4. Übung Endliche Modelltheorie

Abgabe: Donnerstag, den 16. 5. in der Vorlesung

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde ein alternierender Algorithmus für das FO-Auswertungsproblem vorgestellt. Adaptieren Sie diesen Algorithmus für FO+C, die Erweiterung der Prädikatenlogik um Zählquantoren mit folgender Semantik:

$$\exists^n x\, \varphi(x, \bar{y}) \quad \text{gdw} \quad \exists x_1 \dots \exists x_n \Big(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(x_i, \bar{y}) \Big).$$

Hinweis: Benutzen Sie die durch die Eingabe vorgegebene Ordnung auf der Struktur, und beachten Sie, dass es genau dann n Elemente kleiner als x gibt, wenn ein $z < x$ existiert, so dass es noch $n-1$ Elemente kleiner als z gibt.

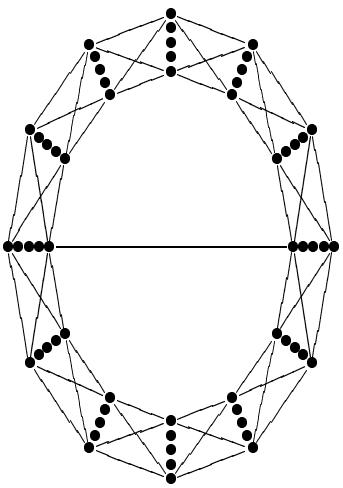
Aufgabe 2

Sei $A = \{1, \dots, n\}$ eine nichtleere Menge, $\circ : A \times A \to A$ eine zweistellige Funktion und S eine Teilmenge von A. Der Abschluss $\langle S \rangle$ von S ist die kleinste Menge $U \subseteq A$, welche S enthält, so dass für alle $x, y \in U$ gilt $x \circ y \in U$. Geben sie einen alternierenden Algorithmus an, der mit möglichst geringem Platzaufwand für gegebene $A, \circ, S$ und $c \in A$ entscheidet, ob $c \in \langle S \rangle$.

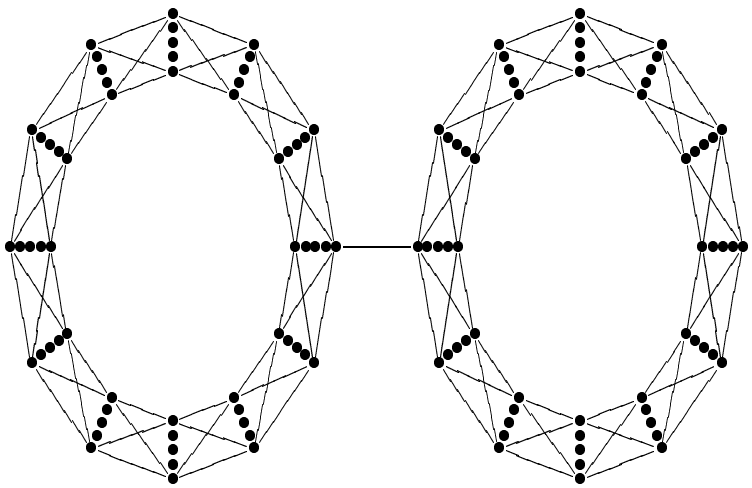
Aufgabe 3

(i) Ein (n,k)-Kreis ist ein ungerichteter Graph bestehend aus n Partitionen von je k Knoten, in dem die Knoten benachbarter Partitionen paarweise verbunden sind. Für $n > 2k$ sei $\mathfrak{A}_n$ ein (n,k)-Kreis mit einer zusätzlichen Kante zwischen je einem Knoten der ersten und der $k+1$-ten Partition, und $\mathfrak{B}_n$ ein Graph, der aus zwei durch eine Kante verbundenen (n,k)-Kreisen besteht. Beschreiben Sie die k-Umgebungen in $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{B}_n$? Wie oft kommen diese jeweils vor?

(ii) Ein Graph heisst *k-zusammenhängend*, wenn jeder durch Entfernen von weniger als k Knoten erhaltene Teilgraph zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass die Klasse der k-zusammenhängeden Graphen nicht FO-axiomatisierbar ist.



$\mathfrak{A}_{12}$, $(k = 5)$



$\mathfrak{B}_{12}$, $(k = 5)$

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Formalisieren Sie in SO (wenn möglich, in MSO) folgende Eigenschaften von Graphen:

(i) Bipartitheit,

(ii) k-Färbbarkeit,

(iii) k-Zusammenhang,

(iv) gerade Anzahl von Knoten.