Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger, A. Blumensath

SS 2002

5. Übung Endliche Modelltheorie

Abgabe: Donnerstag, den 30. 5. in der Vorlesung

Aufgabe 1

Entwerfen Sie ein Auswertungsspiel für die Logik TC, und geben Sie einen Algorithmus an, der für ein solches Spiel entscheidet, welcher Spieler eine Gewinnstrategie hat. Was ist die Komplexität ihres Algorithmuses?

Aufgabe 2

Wir betrachten *endliche* Transitionssysteme $\mathfrak{K} = (S, E, P)$ mit binärer Kantenrelation E und einstelligem Prädikat P.

(a) Formalisieren Sie folgende Sachverhalte in TC:

(1) Es gibt einen Zykel.

(2) Die Relation E ist fundiert, d. h. es existiert keine unendliche Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $(a_i, a_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

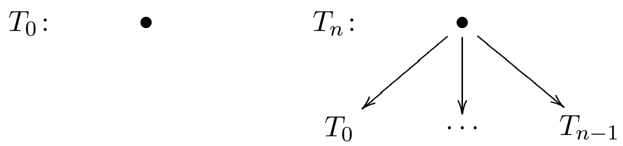
(3) Es gibt einen unendlichen Pfad vom Zustand x aus, auf welchem unendlich oft ein Zustand aus P gesehen wird.

Bemerkung. Für Aufgaben (2) und (3) ist es wesentlich, daß die Strukturen endlich sind. Im allgemeinen sind diese Eigenschaften nicht TC-definierbar.

(b) Geben Sie eine Übersetzung von CTL-Formeln φ nach TC an, so daß die jeweils resultierende Formel auf endlichen Strukturen zu φ äquivalent ist.

Aufgabe 3

Gegeben sei eine Familie von (gerichteten) Bäumen T_n, $n \in \mathbb{N}$, wobei T_0 aus einem einzelnen Knoten besteht, und T_n entsteht, indem an die Wurzel alle Bäume T_i für $i < n$ angehängt werden:



Sei schließlich T_ω der Baum, an dessen Wurzel alle T_n, $n \in \mathbb{N}$, hängen, und S_ω der Baum, welcher aus T_ω entsteht, indem man eine Schleife an die Wurzel hängt und den resultierenen Graphen zu einem Baum abwickelt.

(a) Konstruieren Sie eine TC-Formel $\varphi(x, y)$, welche in T_ω besagt, daß x und y denselben Abstand zur Wurzel haben.

(b) Geben Sie eine TC-Formel φ an, so daß $T_\omega \models \varphi$ und $S_\omega \not\models \varphi$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, daß man zu jeder negierten DTC-Formel $\neg[\mathsf{dtc}_{x,y}\, Exy](a, b)$ eine äquivalente DTC-Formel konstruieren kann, in welcher die DTC-Operatoren nur positiv vorkommen.