Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger, A. Blumensath

SS 2002

6. Übung Endliche Modelltheorie

Abgabe: Donnerstag, den 6. 6. in der Vorlesung

Aufgabe 1

(a) Sei $(V, E, P_\vee, P_\neg, I_0, I_1, \mathrm{out})$ ein Schaltkreis, wobei $P_\vee$ die Menge der OR-Gatter; $P_\neg$ die Menge der NOT-Gatter; I_0 die Menge der Eingänge mit Wert 0; I_1 die Menge der Eingänge mit Wert 1 und out der Ausgang ist. Geben Sie einen LFP-Satz an, welcher besagt, daß am Ausgang der Wert 1 anliegt.

(b) Sei $(\mathbb{N}, s)$ die Struktur der natürlichen Zahlen mit der Nachfolgefunktion $s(x) := x + 1$. Geben Sie LFP-Formeln an, welche die Addition, Multiplikation und Exponentiation definieren (d. h. $\varphi_+(x, y, z)$ gilt genau dann, wenn $x + y = z$).

Aufgabe 2

Beweisen Sie, daß der Satz

$$\forall x \exists y Fxy \wedge \forall x[\mathsf{lfp}\ Rx.\ \forall y(Fyx \to Ry)](x)$$

ein Unendlichkeitsaxiom ist, d. h., daß er erfüllbar ist, aber kein endliches Modell hat.

Aufgabe 3

Sei $(V, E, V_0, V_1, (P_i)_{i<n})$ der Spielgraph eines Paritätsspiels mit n Prioritäten, wobei P_i die Menge der Positionen mit Priorität i ist. Geben Sie je eine LFP-Formel $\varphi(x)$ an, welche

(a) für $n = 1$;

(b) für $n = 2$;

die Menge der Gewinnpositionen von Spieler 0 definiert.

Aufgabe 4

Geben Sie L_μ-Formeln an, welche besagen, daß

(a) ein Zustand erreicht werden kann, an dem P gilt;

(b) es einen Pfad gibt, auf welchem unendlich oft ein Zustand aus P vorkommt;

(c) auf allen Pfaden immer wieder ein Zustand aus P vorkommt;

(d) auf allen Pfaden, immer wenn ein Zustand aus P auftaucht, es von diesem Zustand aus einen Pfad zu einem Zustand aus Q gibt.