Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger, A. Blumensath

SS 2002

7. Übung Endliche Modelltheorie

Abgabe: Donnerstag, den 20. 6. in der Vorlesung

Aufgabe 1

Geben Sie (möglichst einfache) Beispiele für Operatoren $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ an, mit:

(i) F besitzt Fixpunkte, aber keinen kleinsten Fixpunkt.

(ii) F besitzt einen kleinsten Fixpunkt, ist aber nicht monoton.

(iii) F ist monoton und nicht inflationär.

(iv) F ist inflationär und nicht monoton.

(v) F ist induktiv, aber weder monoton noch inflationär.

Aufgabe 2

Formulieren Sie folgende Eigenschaften von ungerichteten Graphen $\mathcal{G}$ in LFP:

(i) $\mathcal{G}$ is ein Baum.

(ii) $\mathcal{G}$ ist bipartit.

(iii) Alle Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{G}$ haben gleiche Durchmesser.

(iv) $\mathcal{G}$ ist k-zusammenhängend.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein ungerichteter Graph mit einer expliziten Ordnung der Knoten $\mathcal{G} = (V, E, <)$. Entwerfen Sie ein effizientes Verfahren um zu entscheiden, ob die Kanten von $\mathcal{G}$ so gerichtet werden können, dass ein stark zusammenhängender Graph entsteht.

Axiomatisieren Sie in LFP die Klasse der (ungerichteten und geordneten) Graphen, für die dies zutrifft.

Aufgabe 4

Ein Wort $w = a_0 \dots a_{n-1} \in \{0,1\}^*$ kann als Struktur $\underline{w} := (\{0, \dots, n-1\}, E, P_0, P_1)$ kodiert werden, wobei

$$E := \{\, (i, i+1) \mid i < n-1 \,\} \quad \text{und} \quad P_b := \{\, i < n \mid a_i = b \,\}.$$

Zeigen Sie, dass für jede reguläre Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ eine L_μ-Formel φ_L existiert, so dass

$$\underline{w}, 0 \models \varphi_L \quad \text{gdw} \quad w \in L.$$

Hinweis: Betrachten Sie einen endlichen Automaten, welcher L erkennt, und verwenden Sie pro Zustand eine Fixpunktvariable.