Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger, A. Blumensath

SS 2002

8. Übung Endliche Modelltheorie

Abgabe: Donnerstag, den 27. 6. in der Vorlesung

Aufgabe 1

Beschreiben Sie die Gewinnmengen in Paritätsspielen auf (i) Cliquen und (ii) vollständig bipartiten Graphen.

Aufgabe 2

Ein Paritätsspiel $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$ heisst *schwach*, wenn entlang jeder Kante $(v, w) \in E$ gilt $\Omega(v) \leq \Omega(w)$.

(i) Beweisen Sie, dass in einem schwachen Paritätsspiel jede starke Zusammenhangskomponente enweder nur gerade oder nur ungerade Zykel enthält. (Ein Zyklus ist gerade, wenn die kleinste darauf vorkommende Priorität gerade ist)

(ii) Geben Sie ein effizientes Verfahren an, um die Gewinnmengen in solchen Spielen zu bestimmen.

(iii) Zeigen Sie, dass jedes Model-Checking Spiel für alternierungsfreie LFP-Formeln (Formeln, in denen kleinste und grösste Fixpunkte nicht geschachtelt vorkommen) durch Umverteilung der Prioritäten in ein schwache Paritätsspiel umgewandelt werden kann, so dass die Gewinnpartition erhalten bleibt.

(iv) Geben Sie eine LFP-Formel an, welche die Menge der Gewinnpositionen von Spieler 0 in einem schwachen Paritätsspiel definiert.

Aufgabe 3

Sei $(V, E, V_0, V_1, (P_i)_{i<n})$ der Spielgraph eines Paritätsspiels mit n Prioritäten, wobei P_i die Menge der Positionen mit Priorität i ist. Geben Sie je eine LFP-Formel $\varphi(x)$ an, welche

(a) für $n = 1$;

(b) für $n = 2$;

die Menge der Gewinnpositionen von Spieler 0 definiert.

Aufgabe 4

Ein Wort $w = a_0 \ldots a_{n-1} \in \{0, 1\}^*$ kann als Struktur $\underline{w} := (\{0, \ldots, n-1\}, E, P_0, P_1)$ kodiert werden, wobei

$$E := \{\, (i, i+1) \mid i < n-1 \,\} \quad \text{und} \quad P_b := \{\, i < n \mid a_i = b \,\}.$$

Zeigen Sie, dass für jede reguläre Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$ eine L_μ-Formel φ_L existiert, so dass

$$\underline{w}, 0 \models \varphi_L \quad \text{gdw} \quad w \in L.$$

Hinweis: Betrachten Sie einen endlichen Automaten, welcher L erkennt, und verwenden Sie pro Zustand eine Fixpunktvariable.