Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger, A. Blumensath

9. Übung Endliche Modelltheorie

Abgabe: Donnerstag, den 4. 7. in der Vorlesung

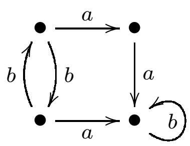
Aufgabe 1

(a) Formen Sie folgende simultane Fixpunktdefinition in eine LFP-Formel ohne simultane Fixpunkte um:

$$[\mathsf{lfp}\ Rxy : S](xy) \qquad S := \begin{cases} Rxy & := Exy \lor \exists z(Rxz \land Tzy), \\ Txy & := Exy \land Qx \land Qy, \\ Qx & := \forall z(Exz \to Rzx). \end{cases}$$

(b) Seien $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zwei Transitionssysteme mit Zuständen v_1 in $\mathfrak{K}_1$ und v_2 in $\mathfrak{K}_2$. Das *Simulationsspiel* $G(\mathfrak{K}_1, v_1; \mathfrak{K}_2, v_2)$ is folgendermaßen definiert: Die Anfangsposition ist (v_1, v_2). In der Position (w_1, w_2) wählt Spieler 0 eine Transition $w_1 \xrightarrow{a} u_1$, und Spieler 1 antwortet mit einer Transition $w_2 \xrightarrow{a} u_2$. Die neue Position ist (u_1, u_2). Kann ein Spieler nicht ziehen, so verliert er. Unendliche Partien werden von Spieler 1 gewonnen.

Gegeben sei das Transitionssystem $\mathfrak{K}$:



Geben Sie eine LFP-Formel φ mit simultanen Fixpunkten an, so daß $\mathfrak{K}' \models \varphi$ genau dann, wenn Spieler 1 das Spiel $G(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}')$ gewinnt.

Hinweis: Verwenden Sie eine Fixpunktvariable für jeden Zustand von $\mathfrak{K}$.

Aufgabe 2

Geben Sie eine IFP-Formel $\varphi(x_0, x_1, y_0, y_1)$ an, welche für ungerichtete Graphen besagt, daß die Entfernungen zwichen x_0 und x_1 und zwischen y_0 und y_1 gleich sind.

Aufgabe 3

Conway's Spiel Life wird auf einem ungerichteten Graphen gespielt. Zu Beginn sind bestimmte Knoten mit Steinen belegt. In jedem Schritt wird folgende Regel simultan auf alle Knoten angewand: Ein belegter (unbelegter) Knoten bleibt (wird) belegt genau dann wenn er 2 oder 3 (genau 3) belegte Nachbarknoten besitzt.

Geben Sie einen Satz in PFP mit Signatur $\{E, P\}$ an (E die Kantenrelation des Graphen und P die Menge der Knoten in der Anfangskonfiguration), welcher besagt, daß das Spiel mit dieser Anfangskonfiguration schließlich stationär wird.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, daß auf endlichen geordneten Strukturen jede SO-Formel zu einer PFP-Formel äquivalent ist.

Hinweis: Eine Quantor über eine Relationsvariable kann durch eine PFP-Induktion (etwa entlang der lexikographischen Ordnung) simuliert werden.