Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

SS 2007

1. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Mittwoch, den 25. 4. um 17:15 Uhr am Lehrstuhl oder in der Übung.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgenden Definitionen für die Mengen W_σ^n von Knoten, von denen aus Spieler σ eine Strategie hat, in höchstens n Zügen zu gewinnen:

(i)
$$W_\sigma^0 := \{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE = \emptyset\}$$
$$W_\sigma^{n+1} := \{v \in V_\sigma \ : \ vE \cap W_\sigma^n \neq \emptyset\} \cup \{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE \subseteq W_\sigma^n\}$$

(ii)
$$\widetilde{W}_\sigma^0 := \{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE = \emptyset\}$$
$$\widetilde{W}_\sigma^{n+1} := \widetilde{W}_\sigma^n \cup \Big\{v \in V_\sigma \ : \ vE \cap \widetilde{W}_\sigma^n \neq \emptyset\Big\} \cup \Big\{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE \subseteq \widetilde{W}_\sigma^n\Big\}$$

Zeigen Sie, dass beide Definitionen äquivalent sind, d. h. dass $W_\sigma^n = \widetilde{W}_\sigma^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2

Das in der Vorlesung vorgestellte Auswertungsspiel für FO wurde definiert für Formeln in Negationsnormalform. Wenn wir diese Beschränkung aufheben, d. h. auch die Negation von nicht atomaren Formeln zulassen, entspricht die Negation einem Rollentausch der Spieler; die Verifizierin, die zeigen will, dass $\neg\varphi$ gilt, nimmt die Rolle des Falsifizierers ein, der zeigen will, dass φ *nicht* gilt und umgekehrt.

Definieren Sie ein geeignetes Auswertungsspiel ohne expliziten Rollentausch, bei dem die Formeln nicht notwendigerweise in Negationsnormalform gegeben sein müssen.

Aufgabe 3

In der Vorlesung wurde ein Auswertungsspiel für FO vorgestellt. Passen Sie die Regeln auf geeignete Weise an, um ein Auswertungsspiel für FO+C, die Erweiterung der Prädikatenlogik um Zählquantoren mit folgender Semantik

$$\exists^{\geq n} x\, \varphi(x, \bar{y}) \quad \text{gdw.} \quad \exists x_1 \ldots \exists x_n \Big(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(x_i, \bar{y}) \Big),$$

zu erhalten.

Aufgabe 4

Wir betrachten fundierte Spiele (d. h. der Spielgraph enthält keine unendlichen Pfade), in denen ein Spieler genau dann gewinnt, wenn sein Gegner am Zug ist, aber nicht ziehen kann.

Wir nennen ein solches Spiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ *bipartit*, falls $E \subseteq (V_0 \times V_1) \cup (V_1 \times V_0)$ gilt, d. h. falls V_0 und V_1 gerade eine Bipartition des Spielgraphen darstellt. Spieltheoretisch bedeutet dies, dass die beiden Spieler immer strikt alternierend ziehen.

(a) Seien $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ und $\mathcal{G}' = (V', V_0', V_1', E')$ zwei bipartite Spiele. Wir betrachten für jeden Spieler $i \in \{0, 1\}$ die Komposition $\mathcal{G} \oplus_i \mathcal{G}'$, bei der die beiden Spiele in folgender Weise parallel gespielt werden: Spieler i hat an Positionen in $V_i \times V_i'$ die Wahl, in welchem der beiden Spiele er seinen Zug macht, und Spieler $1 - i$ muss in demselben Spiel antworten. Definieren Sie die beschriebene Komposition $\oplus_i$ von zwei bipartiten Spielen formal.

(b) Wir ordnen jedem Spiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ das *duale Spiel* $\mathcal{G}^d = (V, V_1, V_0, E)$ zu, bei dem die Positionen (und damit die Rollen) der Spieler vertauscht sind.

Beweisen Sie das sogenannte *Copycat-Theorem*: In jedem fundierten bipartiten Spiel $\mathcal{G}$ gewinnt Spieler i von jeder Position der Form $(v, v) \in \mathcal{G} \oplus_i \mathcal{G}^d$ aus. (Beachten Sie, dass Spieler $1 - i$ das Spiel beginnt.)