Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

SS 2007

2. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Mittwoch, den 2. 5. um 17:15 Uhr am Lehrstuhl oder in der Übung.

Aufgabe 1

(a) Sei $(\mathbb{N}, s)$ die Struktur der natürlichen Zahlen mit der Nachfolgefunktion $s(x) := x + 1$. Geben Sie LFP-Formeln an, welche die Addition, Multiplikation und Exponentiation definieren, d. h. $\varphi_+(x, y, z)$ gilt genau dann, wenn $x + y = z$ usw.

(b) Geben Sie L_μ-Formeln an, welche besagen, dass

(i) es einen Pfad gibt, auf dem irgendwann nur noch Zustände aus P vorkommen;

(ii) auf allen Pfaden immer wieder ein Zustand aus P vorkommt;

(iii) auf allen Pfaden, immer wenn ein Zustand aus P auftaucht, es von diesem Zustand aus einen Pfad zu einem Zustand aus Q gibt.

Aufgabe 2

Die monadische Logik zweiter Stufe (MSO) ist eine Erweiterung der Prädikatenlogik erster Stufe um Quantoren über Mengenvariablen, d. h. wir erlauben zusätzlich Formeln der Form $\forall X\, \varphi(X)$ und $\exists X\, \varphi(X)$, wobei die Mengenvariable X in φ wie ein einstelliges Prädikat benutzt wird, mit folgender Semantik: $\mathfrak{A} \models \exists X \varphi(X)$ gdw. eine Teilmenge $A_0 \subseteq A$ existiert mit $\mathfrak{A} \models \varphi(A_0)$ (analog für $\forall X \dots$).

Geben Sie eine Übersetzung an, die jeder Formel $\varphi \in \mathrm{L}_\mu$ eine Formel $\varphi^*(x) \in$ MSO zuordnet, so dass $\mathcal{K}, v \models \varphi$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{K} \models \varphi^*(v)$.

Aufgabe 3

Ein *Büchi-Spiel* $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, F)$, wobei $F \subseteq V$, ist ein Spiel, bei dem der Gewinner einer unendlichen Partie nach folgendem Kriterium ermittelt wird: Spieler 0 gewinnt die Partie genau dann, wenn unendlich oft Knoten aus der Menge F durchlaufen werden.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Büchi-Spiel äquivalent zu einem Paritätsspiel mit zwei Prioritäten ist.

(b) Ist umgekehrt auch jedes Paritätsspiel mit zwei Prioritäten äquivalent zu einem Büchi-Spiel?

(c) Geben Sie einen Algorithmus an, mit dem die Gewinnregion von Spieler 0 in polynomialer Zeit berechnet werden kann.

Aufgabe 4

Wir betrachten im Folgenden CTL wie in der Vorlesung Mathematische Logik definiert (d. h. mit Pfadquantoren E und A, sowie den temporalen Operatoren X (*next*) und U (*until*), wobei die temporalen Operatoren nur in Kombination mit einem Pfadquantor auftreten dürfen).

Sei R (*release*) ein weiterer temporaler Operator mit folgender Semantik: $\mathcal{K}, v \models E(\varphi R \psi)$ gdw. ein Pfad $v = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n, \ldots$ existiert, so dass $\mathcal{K}, v_i \models \psi$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt oder ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mathcal{K}, v_n \models \varphi$ und $\mathcal{K}, v_i \models \psi$ für alle $i < n$ (analog für $A(\varphi R \psi)$).

(a) Zeigen Sie, dass CTL(R) (also CTL erweitert um den Release Operator) die gleiche Ausdrucksstärke hat wie CTL.

(b) Zeigen Sie, dass CTL(R)-Formeln in Negationsnormalform transformiert werden können.

(c) Definieren Sie ein Model-Checking-Spiel für CTL(R)-Formeln in Negationsnormalform.

Hinweis: Sie können folgende Äquivalenz verwenden: $E(\varphi U \psi) \equiv \psi \vee \big(\varphi \wedge EXE(\varphi U \psi)\big)$ (analog für $A(\varphi U \psi)$, $E(\varphi R \psi)$ und $A(\varphi R \psi)$).