Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

SS 2007

3. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 8. 5. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

(a) Seien f und f' positionale Gewinnstrategien für Spieler σ auf den Regionen W bzw. W'. Zeigen Sie, dass die Strategien geeignet kombiniert werden können, um eine Gewinnstrategie auf der Region $W \cup W'$ zu erhalten. Beachten Sie, dass W und W' nicht notwendigerweise disjunkt sein müssen.

(b) Sei $\mathcal{G}$ ein Paritätsspiel mit Gewinnregionen W_0 und W_1. Offensichtlich muss jede Gewinnstrategie von Spieler 0 innerhalb der Gewinnregion W_0 bleiben, d. h. es muss $f(V_0 \cap W_0) \subseteq W_0$ gelten. Andererseits ist dies kein hinreichendes Kriterium für eine Gewinnstrategie. Geben Sie ein Paritätsspiel und eine positionale Strategie für Spieler 0 an, so dass alle mit f konsistenten Partien in W_0 bleiben, aber trotzdem von Spieler 1 gewonnen werden.

Aufgabe 2

Für $x, y \in \mathbb{N}^d \cup \{\top\}$ und $i \in \{0, \ldots, d-1\}$, $d \in \mathbb{N}$, sei $x \leq_i y$ gdw.

- $y = \top$, oder
- $x = (x_0, \ldots, x_{d-1})$, $y = (y_0, \ldots, y_{d-1})$ und $x_k = y_k$ für alle $0 \leq k < i$, oder
- $x = (x_0, \ldots, x_{d-1})$, $y = (y_0, \ldots, y_{d-1})$ und $x_k < y_k$ für das kleinste $0 \leq k < i$ mit $x_k \neq y_k$,

d. h. $\leq_i$ ist die lexikographische Ordnung auf den ersten i Komponenten von $\mathbb{N}^d$ (erweitert um ein maximales Element $\top$). Weiter sei $x <_i y$ gdw. $x \leq_i y$ und $y \not\leq_i x$.

Sei nun $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$ mit $\Omega : V \to \{0, \ldots, d-1\}$ ein Paritätsspiel mit d Prioritäten. Eine Funktion $f : V \to (\mathbb{N}^d \cup \{\top\})$ heißt *Fortschrittsmaß für $\mathcal{G}$*, wenn folgende Bedingungen für alle $v \in V$ mit $f(v) \neq \top$ gelten:

(i) Ist $v \in V_0$, dann gibt es ein $w \in vE$ mit $f(w) \leq_{\Omega(v)} f(v)$;

(ii) Ist $v \in V_0$ und $\Omega(v)$ ungerade, dann gibt es ein $w \in vE$ mit $f(w) <_{\Omega(v)} f(v)$;

(iii) Ist $v \in V_1$, dann gilt $f(w) \leq_{\Omega(v)} f(v)$ für alle $w \in vE$;

(iv) Ist $v \in V_1$ und $\Omega(v)$ ungerade, dann gilt $f(w) <_{\Omega(v)} f(v)$ für alle $w \in vE$.

(a) Zeigen Sie, dass Spieler 0 für jedes Fortschrittsmaß f für $\mathcal{G}$ von allen Knoten mit $f(v) \neq \top$ eine Gewinnstrategie in $\mathcal{G}$ hat.

(b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt: Geben Sie ein Paritätsspiel (mit einer Priorität) an, so dass Spieler 0 von allen Knoten gewinnt, aber kein Fortschrittsmaß $f : V \to (\mathbb{N}^d \cup \{\top\})$ existiert. Wie könnte man die Definition von Fortschrittsmaßen verallgemeinern, um dies zu beheben?

Aufgabe 3

Ein Paritätsspiel $\mathcal{G} = (V, V_0, E, \Omega)$ heißt *schwach*, wenn entlang jeder Kante $(v, w) \in E$ gilt: $\Omega(v) \leq \Omega(w)$.

(a) Beweisen Sie, dass in einem schwachen Paritätsspiel jede starke Zusammenhangskomponente entweder nur gerade oder nur ungerade Zykel enthält. (Ein Zyklus ist gerade, wenn die kleinste darauf vorkommende Priorität gerade ist).

(b) Geben Sie ein effizientes Verfahren an, um die Gewinnmengen in solchen Spielen zu bestimmen.

(c) Zeigen Sie, dass jedes Model-Checking-Spiel für alternierungsfreie LFP-Formeln (Formeln, in denen kleinste und größte Fixpunkte nicht geschachtelt vorkommen) durch Umverteilung der Prioritäten in ein schwaches Paritätsspiel umgewandelt werden kann, so dass die Gewinnpartition erhalten bleibt.

(d) Geben Sie eine LFP-Formel an, welche die Menge der Gewinnpositionen von Spieler 0 in einem schwachen Paritätsspiel definiert.