Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

SS 2007

5. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 22. 5. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Zu einem unendlichen Wort $\alpha = \alpha(0)\alpha(1)\ldots \in \{a,b\}^\omega$ definieren wir die Kripkestruktur $\mathcal{K}_\alpha = (\mathbb{N}, E_a, E_b)$ mit

$$E_x := \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}, \alpha(n) = x\}$$

für $x \in \{a,b\}$. Seien nun $\varphi_1 = \nu X.\mu Y.[a]X \wedge [b]Y$ und $\varphi_2 = \mu Y.\nu X.[a]X \wedge [b]Y$.

(a) Berechnen Sie für $i = 1,2$ die Sprachen $L_i = \{\alpha \in \{a,b\}^\omega : \mathcal{K}_\alpha, 0 \models \varphi_i\}$.

Hinweis: Betrachten Sie das Model-Checking-Spiel $\mathcal{G}(\mathcal{K}_\alpha, \varphi_i)$.

(b) Gilt $\varphi_1 \models \varphi_2$ oder $\varphi_2 \models \varphi_1$ über allen Kripkestrukturen?

Aufgabe 2

Eine Gewinnbedingung $W \subseteq V^\omega$ heißt *präfixunabhängig*, wenn $x\alpha \in W \Leftrightarrow \alpha \in W$ für jedes $x \in V^*$ und $\alpha \in V^\omega$. Offensichtlich ist jede Paritätsbedingung präfixunabhängig.

(a) Zeigen Sie: Für jedes Spiel $\mathcal{G}$ über der Arena $G = (V, V_0, V_1, E)$ und mit einer präfixunabhängigen Gewinnbedingung W ist die Gewinnregion W_0 von Spieler 0 ein Fixpunkt des Operators

$$F_\psi : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V) : X \mapsto \{v \in V : G, v \models \psi(X)\}$$

für die Formel $\psi(X) := (V_0 \wedge \Diamond X) \vee (V_1 \wedge \Box X) \in L_\mu$.

(b) Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen an, so dass auf Paritätsspielen $W_0 = \mathbf{lfp}(F_\psi)$ bzw. $W_0 = \mathbf{gfp}(F_\psi)$ gilt.

Aufgabe 3

Ein *Banach-Mazur-Spiel* (über $\{0,1\}$) ist ein unendliches Spiel, in dem die beiden Spieler abwechselnd nicht-leere Worte $x_i, y_i \in \{0,1\}^+$ wählen. Spieler 0, der das Spiel beginnt, gewinnt das Spiel, wenn die Konkatenation $\alpha = x_0y_0x_1y_1\ldots$ der gezogenen Wörter in der Gewinnmenge $W \subseteq \{0,1\}^\omega$ liegt.

(a) Entscheiden Sie für die folgenden Gewinnbedingungen W, welcher Spieler das Banach-Mazur Spiel gewinnt.

(i) $W = \{\alpha \in \{0,1\}^\omega : \alpha$ enthält unendlich oft das Infix $0^{17}\}$,

(ii) $W = \{\alpha \in \{0,1\}^\omega : \alpha$ enthält nur endlich oft das Infix $010\}$,

(iii) $W = \{\alpha \in \{0,1\}^\omega : \alpha$ enthält beliebig lange 0-Folgen als Infixe$\}$.

(b) Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, der den Fréchet-Filter enthält, und sei W die Menge aller $\alpha \in \{0,1\}^\omega$, so dass $\{n : \alpha(n) = 1\} \in \mathcal{U}$. Zeigen Sie, dass das Banach-Mazur-Spiel mit Gewinnbedingung W nicht-determiniert ist.