Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

SS 2007

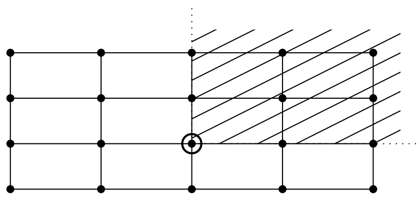
6. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 5. 6. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung

Aufgabe 1

Eine rechteckige Schokoladentafel mit $n \times m$ Stücken kann als Gitter $\{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$ aufgefasst werden, so dass die Gitterflächen den Stücken und die Knoten des Gitters den Bruchstellen der Schokoladentafel entsprechen.

Wir betrachten folgendes Spiel auf einer rechteckigen Schokoladentafel: Die Spieler wählen abwechselnd (Spieler 0 beginnt) einen Gitterknoten und entfernen alle Schokoladenstücke, die sich rechts überhalb dieses Knotens befinden. Bei jedem Zug muss dabei mindestens ein Schokoladenstück entfernt werden. Verloren hat derjenige Spieler, der das letzte übrigbleibende Stück nehmen muss.



Zeigen Sie, dass außer für $n = m = 1$ immer der gleiche Spieler (welcher?) das Spiel gewinnt, egal wie groß die Schokoladentafel ist.

Hinweis: Geben Sie keine explizite Gewinnstrategie an, sondern folgern Sie deren Existenz aus dem Satz über die Determiniertheit endlicher Spiele.

Aufgabe 2

(a) Geben Sie für die folgende Mengen $X \subseteq \{0,1\}^\omega$ jeweils die kleinste Stufe Σ^0_α bzw. Π^0_α der Borel-Hierarchie an, die X enthält.

 (i) $X = \{x \in \{0,1\}^\omega : x \text{ enthält beliebig lange Infixe } 10^n1\}$;

 (ii) $X = \{x \in \{0,1\}^\omega : \text{enthält } x \text{ das Infix 00 unendlich oft, dann auch das Infix 11}\}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Stufe Σ^0_α bzw. Π^0_α der Borel-Hierarchie unter endlicher Vereinigung und endlichem Schnitt abgeschlossen ist.

(c) Zu einer Sprache $W \subseteq A^*$ von endlichen Wörtern definieren wir die folgende Sprache $\lim W \subseteq A^\omega$ von unendlichen Wörtern:

$$\lim W = \{x \in A^\omega : \text{ex. unendlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x_0 \dots x_n \in W\}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $L \subseteq A^\omega$ gilt: $L \in \Pi^0_2 \iff L = \lim W$ für ein $W \subseteq A^*$.

Aufgabe 3

Seien $X \subseteq A^\omega$ und $Y \subseteq B^\omega$ Borel-Mengen. Wir sagen, dass X und Y *unvergleichbar* sind, wenn weder $X \leq Y$ noch $Y \leq X$ gilt. Zeigen Sie mit Hilfe von Wadge-Spielen:

(a) Sind X und Y unvergleichbar, so gilt $X \leq B^\omega \setminus Y$ und $B^\omega \setminus Y \leq X$.

(b) Keine drei Borel-Mengen sind unvergleichbar.

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, dass jede endliche Menge $X \subseteq A^\omega$ Π^0_1-vollständig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $(0^*1)^\omega$ Π^0_2-vollständig ist.

(c) Geben Sie eine abzählbare Menge X an, so dass $X \in \Sigma^0_2 \setminus \Pi^0_1$.