

## 7. Übung Logik und Spiele

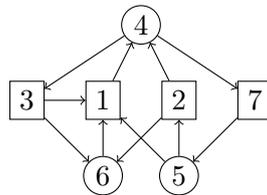
Abgabe: bis Dienstag, den 12.6. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung

### Aufgabe 1

Betrachten Sie den unten dargestellten Spielgraphen mit der Muller-Bedingung

$$\mathcal{F}_0 = \{\{2, 4, 5, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$$

und Anfangsposition 4. Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler 0 mit der minimalen Anzahl von Speicherzuständen an und beweisen Sie die Minimalität.



### Aufgabe 2

Definieren Sie für jede Strategie  $\sigma$  eine Äquivalenz-Relation  $\sim_\sigma$  auf endlichen Partieprädixen, so dass sich  $\sigma$  genau dann mit endlichem Speicher realisieren lässt, wenn  $\sim_\sigma$  endlichen Index hat und beweisen Sie diesen Zusammenhang.

### Aufgabe 3

Sei  $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$  ein Muller-Spiel mit  $\Omega : V \rightarrow \mathbb{N}$ . Wir nennen  $\mathcal{G}$  ein (infinitäres) Paritätsspiel, wenn

$$\mathcal{F}_0 = \{X \subseteq \mathbb{N} : \min(X) \text{ ist gerade}\} \cup \{\emptyset\}$$

und wir nennen  $\mathcal{F}_0$  einen *Abwärtskegel*, wenn eine Menge  $A \subseteq \mathbb{N}$  existiert, so dass

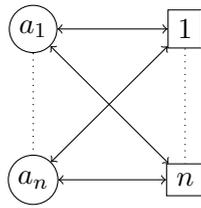
$$\mathcal{F}_0 = \{X : X \subseteq A\}.$$

Ein *1-Registerspeicher* ist eine Speicherstruktur  $(M, \text{update}, \text{init})$  mit  $M = \mathbb{N}$  und  $\text{update}(m, v) \in \{m, \Omega(v)\}$  für alle  $m, v$ .

- Geben Sie ein Muller-Spiel mit einem Abwärtskegel als Gewinnbedingung an, das von Spieler 0 gewonnen wird, dieser Spieler aber keine Gewinnstrategie mit endlichem Speicher hat.
- Reduzieren Sie mit einem 1-Registerspeicher Muller-Spiele mit Abwärtskegeln als Gewinnbedingung auf Paritätsspiele.

#### Aufgabe 4

Betrachten Sie für jedes  $n > 1$  das Spiel  $DJW_n$  auf folgendem Spielgraph



in dem Spieler 0, der an runden Knoten den Zug hat, dann gewinnt, wenn die größte unendlich oft besuchte Zahl  $l$  auf der rechten Seite genau der Anzahl der unendlich oft besuchten Knoten auf der linken Seite entspricht.

Zeigen Sie, dass in diesen Spielen Spieler 0 eine Gewinnstrategie hat, und zwar mit einem LAR-Speicher, in dem lediglich Knoten der linken Seite berücksichtigt werden.