Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

SS 2007

8. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 19. 6. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Ein *deterministischer Muller-Automat* ist ein Tupel $\mathcal{A} = (Q, A, q_0, \delta, \mathcal{F})$ mit folgenden Eigenschaften:

- Q ist eine endliche Zustandsmenge,
- A ist das Eingabealphabet,
- $q_0 \in Q$ ist der Anfangszustand,
- $\delta : Q \times A \to Q$ ist die Transitionsfunktion, und
- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(Q)$ ist die Akzeptanzmenge.

$\mathcal{A}$ *akzeptiert* ein unendliches Wort $x \in A^\omega$, wenn $\mathrm{Inf}(\rho) \in \mathcal{F}$ für den eindeutigen Lauf $\rho = q_0 q_1 \ldots$ von $\mathcal{A}$ auf x (d.h. $q_{i+1} = \delta(q_i, x_i)$) gilt. Eine *Sprache* $L \subseteq A^\omega$ heißt *ω-regulär*, wenn es einen deterministischen Muller-Automaten $\mathcal{A}$ gibt, so dass gilt: $x \in L \Longleftrightarrow \mathcal{A}$ akzeptiert x.

Sei nun $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ ein Spielgraph mit $\Omega : V \to C$ und $W \subseteq C^\omega$ eine ω-reguläre Gewinnbedingung, d.h. Spieler 0 gewinnt eine Partie $\pi \in V^\omega$ gdw. $\Omega(\pi) \in W$. Zeigen Sie: Wird W durch einen Muller-Automaten mit n Zuständen definiert, so kann $\mathcal{G}$ mittels eines Speichers der Größe n auf ein Muller-Spiel reduziert werden.

Aufgabe 2

Sei C eine endliche Menge. Eine *Paarbedingung* über C ist eine Menge

$$\mathcal{P} = \{(L_1, R_1), (L_2, R_2,), \ldots, (L_k, R_k)\}$$

mit $L_i, R_i \subseteq C$. Eine Paarbedingung $\mathcal{P}$ definiert die Muller-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0 &= \{F \subseteq C : F \cap L_i \neq \emptyset \Longrightarrow F \cap R_i \neq \emptyset \text{ für alle } i = 1, \ldots, k\},\\ \mathcal{F}_1 &= \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{F}_0\ .\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Die durch eine Paarbedingung $\mathcal{P}$ definierte Muller-Bedingung ist eine Streett-Rabin-Bedingung.

(b) Jede Streett-Rabin-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ ist zu einer Paarbedingung $\mathcal{P}$ äquivalent.

Hinweis: Betrachten Sie zu jedem Knoten $(X, 1)$ des zu $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ gehörenden Zielonka-Baums den eindeutigen Nachfolger $(Y, 0)$ und konstruieren Sie daraus ein geeignetes Paar.

(c) Finden Sie eine Klasse von Paarbedingungen, so dass die dadurch definierten Mullerbedingungen genau die Paritätsbedingungen sind.

Hinweis: Benutzen Sie, dass eine Muller-Bedingung genau dann zu einer Paritätsbedingung äquivalent ist, wenn ihr Zielonka-Baum ein Pfad ist.

Aufgabe 3

Sei $C = \{1, \dots, k\}^2$ und $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ die durch die Paarbedingung $\{(L_1, R_1), \dots, (L_k, R_k)\}$ mit

$$\begin{aligned} L_i &= \{(i,j) : j = 1, \dots, k\}, \\ R_i &= \{(i,i)\} \end{aligned}$$

definierte Streett-Rabin-Bedingung (vgl. Aufgabe 2). Zeigen Sie, dass die Anzahl der Blätter des zu $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ gehörenden Zielonka-Baums $k!$ beträgt.

Aufgabe 4

Wir betrachten die durch $\mathcal{F}_0 = \{\{0,1\}\}$ definierte Streett-Rabin-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ über $\{0,1\}$.

(a) Zeigen Sie: $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ ist nicht zu einer Paritätsbedingung äquivalent.

(b) Sei nun $\mathcal{G}$ ein Spiel mit Gewinnbedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ mit den Gewinnregionen W_0 und W_1. Sei für $x = 0, 1$ weiter a_x die positionale Attraktorstrategie von Spieler 0 nach $W_0 \cap \Omega^{-1}(x)$. Zeigen Sie, dass die positionale Strategie f definiert auf W_0 durch

$$f(v) = \begin{cases} a_1(v) & \text{falls } \Omega(v) = 0, \\ a_0(v) & \text{falls } \Omega(v) = 1 \end{cases}$$

eine Gewinnstrategie für Spieler 0 ist.

(c) Folgern Sie, dass jedes Spiel mit Gewinnbedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ positional determiniert ist.