Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

SS 2007

9. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 26. 6. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

(a) Wir betrachten das durch die folgende Matrix gegebene 2-Personen-Spiel:

$$\begin{bmatrix} (2,5) & (1,1) \\ (4,3) & (2,3) \end{bmatrix}$$

Hat dieses Spiel

(i) ein Gleichgewicht in dominanten Strategien?

(ii) ein reines Nash-Gleichgewicht?

(b) Ist für alle Spiele jedes Gleichgewicht in dominanten Strategien auch ein Nash-Gleichgewicht?

(c) Geben Sie ein endliches Zwei-Personen-Spiel in strategischer Form an, das ein eindeutiges (reines) Nash-Gleichgewicht hat, so dass beide Gleichgewichts-Strategien von einer anderen Strategie des jeweiligen Spielers dominiert werden.

Aufgabe 2

(a) Wir betrachten das Spiel „Battle of the Sexes“ aus der Vorlesung, das durch die folgende Matrix gegeben ist:

$$\begin{bmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie alle gemischten Nash-Gleichgewichte dieses Spiels.

(b) Wir betrachten das Spiel „Schere – Stein – Papier“ wie in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie, dass das Paar von gemischten Strategien, in dem beide Spieler jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ Stein, Schere oder Papier auszuwählen, das einzige Nash-Gleichgewicht ist.

Aufgabe 3

Wir betrachten ein Spiel, in welchem drei Spieler um einen Gewinn von €1 spielen, indem sie gleichzeitig jeweils eine ganze Zahl zwischen 1 und K wählen (für ein festes K). Diejenigen Spieler deren Zahl am nächsten bei $\frac{2}{3}$ des Mittelwertes aller gewählten Zahlen liegt, teilen den Gewinn gleichmäßig untereinander auf.

(a) Gibt es Zahlen k, so dass das Strategieprofil (k, k, k) ein Nash-Gleichgewicht ist?

(b) Gibt es Nash-Gleichgewichte anderer Form?

Hinweis: Kann der Spieler, der die höchste Zahl wählt, seinen Gewinn durch Wahl einer anderen Zahl erhöhen?

Aufgabe 4

Ein endliches Spiel $\Gamma = \big(N, (S_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N}\big)$ in strategischer Form heißt *Potential-Spiel*, falls eine Potentialfunktion $\Phi : S \to \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle Strategieprofile $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$, alle Spieler i und alle $s_i' \in S_i$ gilt:

$$\Phi(s_i, s_{-i}) - \Phi(s_i', s_{-i}) = p_i(s_i, s_{-i}) - p_i(s_i', s_{-i})\,.$$

Zeigen Sie, dass jedes Potential-Spiel ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien besitzt.