Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, T. Ganzow, Ł. Kaiser

SS 2009

1. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 28. 4. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

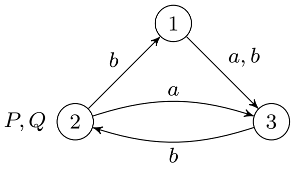
Aufgabe 1

Werten Sie folgende ML Formeln auf der gegebenen Struktur aus, indem Sie das jeweilige Modelchecking-Spiel konstruieren und die Gewinnregionen angeben.

(a) $\varphi_a = \langle a\rangle\langle b\rangle Q$;

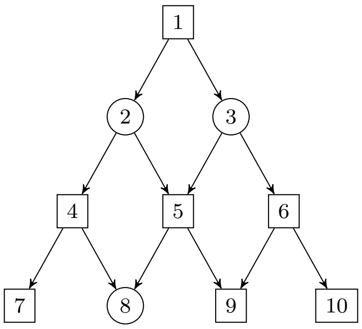
(b) $\varphi_b = \langle b\rangle[a]0$;

(c) $\varphi_c = \langle a\rangle(P \vee [a]P)$.

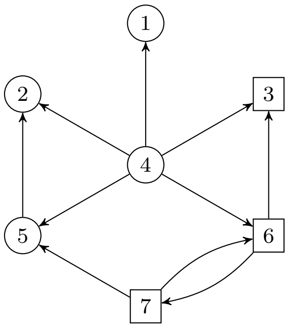


Aufgabe 2

Betrachten Sie die folgenden Spielgraphen $\mathcal{G}_i = (V^i, V_0^i, V_1^i, E^i)$, in denen i eine Position von Spieler 0 und $\boxed{j}$ eine Position von Spieler 1 bezeichnet.



$\mathcal{G}_1$



$\mathcal{G}_2$

(a) Berechnen Sie die Gewinnregionen W_0 und W_1 in den beiden Spielen. Unendliche Partien werden als unentschieden gewertet.

(b) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine ML-Formel an, die genau an den Knoten gilt, von denen aus Spieler 0 eine Strategie hat, in höchstens n Zügen zu gewinnen.

Aufgabe 3

Wir betrachten fundierte Spiele (d. h. der Spielgraph enthält keine unendlichen Pfade), in denen ein Spieler genau dann gewinnt, wenn sein Gegner am Zug ist, aber nicht ziehen kann.

Wir nennen ein solches Spiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ *bipartit*, falls $E \subseteq (V_0 \times V_1) \cup (V_1 \times V_0)$ gilt, d. h. falls V_0 und V_1 gerade eine Bipartition des Spielgraphen darstellt. Spieltheoretisch bedeutet dies, dass die beiden Spieler immer strikt alternierend ziehen.

(a) Seien $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ und $\mathcal{G}' = (V', V_0', V_1', E')$ zwei bipartite Spiele. Wir betrachten für jeden Spieler $i \in \{0, 1\}$ die Komposition $\mathcal{G} \oplus_i \mathcal{G}'$, bei der die beiden Spiele in folgender Weise parallel gespielt werden: Spieler i hat an Positionen in $V_i \times V_i'$ die Wahl, in welchem der beiden Spiele er seinen Zug macht, und Spieler $1 - i$ muss in demselben Spiel antworten. Definieren Sie die beschriebene Komposition $\oplus_i$ von zwei bipartiten Spielen formal.

(b) Wir ordnen jedem Spiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ das *duale Spiel* $\mathcal{G}^d = (V, V_1, V_0, E)$ zu, bei dem die Positionen (und damit die Rollen) der Spieler vertauscht sind.

Beweisen Sie das sogenannte *Copycat-Theorem*: In jedem fundierten bipartiten Spiel $\mathcal{G}$ gewinnt Spieler i von jeder Position der Form $(v, v) \in \mathcal{G} \oplus_i \mathcal{G}^d$ aus. (Beachten Sie, dass Spieler $1 - i$ das Spiel beginnt.)

Aufgabe 4

Im Doppelzugschach gelten für die Figuren die gleichen Zugregeln wie beim Schach mit der Ausnahme, dass ein Zug im Doppelzugschach aus der Hintereinanderausführung von zwei gewöhnlichen regelkonformen Zügen des gleichen Spielers (aber nicht notwendigerweise mit der gleichen Figur) besteht. Alle weiteren besonderen Regeln, die Schachgebote, deren Parieren und das Mattsetzen betreffen, können außer Acht gelassen werden. Jede Partie wird von Weiß begonnen. Zeigen Sie, dass Schwarz keine Gewinnstrategie im Doppelzugschach hat.