Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, T. Ganzow, Ł. Kaiser

SS 2009

3. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 12. 5. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Hinweis: Sie dürfen in den Aufgaben 1 und 2 davon ausgehen, dass in den Formeln nur atomare Formeln negiert auftreten.

Zusatzaufgabe: Beschreiben Sie eine Modifikation Ihrer Spiele, so dass Negationen beliebiger Teilformeln zugelassen werden können.

Aufgabe 1

Wir betrachten FO+C, die Erweiterung der Prädikatenlogik um Zählquantoren $\exists^{\geq n}$ mit folgender Semantik:

$$\mathfrak{A} \models \exists^{\geq n} x\, \varphi(x, \bar{b}) \quad \text{gdw.} \quad \text{es existieren mindestens } n \text{ verschiedene Elemente } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \varphi(a, \bar{b}).$$

(a) Ist FO+C ausdrucksstärker als FO?

(b) Passen Sie die Regeln des Auswertungsspiels für FO auf geeignete Weise an, um ein Auswertungsspiel für FO+C zu erhalten.

(c) Geben Sie die Größe des Spielgraphen eines FO+C Modelcheckingspiels und den Platzbedarf für die Repräsentation der Knoten an.

Aufgabe 2

Die Logik TC ist die Erweiterung von FO um einen Operator, der die transitive Hülle einer Relation definiert. Sei $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ eine Formel, die mindestens 2ℓ Variablen $\overline{x} = (x_1, \dots, x_\ell)$ und $\overline{y} = (y_1, \dots, y_\ell)$ frei enthält, dann ist $[\mathrm{tc}_{\overline{x},\overline{y}}\, \varphi(\overline{x}, \overline{y})](\overline{a}, \overline{b})$ die TC-Formel, die besagt, dass $(\overline{a}, \overline{b})$ in der reflexiven transitiven Hülle der binären Relation auf ℓ-Tupeln, die durch φ definiert wird, enthalten ist, d. h. formal (mit zusätzlichen freien Variablen $\overline{z}$)

$$\mathfrak{A} \models [\mathrm{tc}_{\overline{x},\overline{y}}\, \varphi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})](\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \quad \text{gdw.} \quad (\overline{a}, \overline{b}) \in \mathrm{TC}\Big(\{(\overline{u}, \overline{v}) \in A^{2\ell} : \mathfrak{A} \models \varphi(\overline{u}, \overline{v}, \overline{c})\}\Big).$$

Zum Beispiel drückt die Formel $\forall u \forall v [\mathrm{tc}_{xy}\, Exy](u, v)$ aus, dass ein Graph zusammenhängend ist.

(a) Geben Sie eine TC-Formel an, die ausdrückt, dass ein ungerichteter Graph bipartit ist.

Hinweis: Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.

(b) Wir betrachten das k-Variablen-Fragment TC^k, in dem jede Teilformel höchstens k freie Variablen haben darf und in dem daher auch die Stelligkeit der Relationen beschränkt ist, deren transitive Hüllen definiert werden können. Entwerfen Sie ein geeignetes Auswertungsspiel für TC^k, und zeigen Sie damit, dass das Entscheidungsproblem, ob Spieler 0 eine Gewinnstrategie hat, in P ist.

Hinweis: P = ALogspace.

Aufgabe 3

Eine *Bisimulation* zwischen zwei Transitionssystemen $\mathfrak{K} = (V, (E_a)_{a\in A}, (P_i)_{i\in I})$ und $\mathfrak{K}' = (V', (E'_a)_{a\in A}, (P'_i)_{i\in I})$ ist eine Relation $Z \subseteq V \times V'$, so dass für alle $(v, v') \in Z$ gilt:

(a) $v \in P_i$ gdw. $v' \in P'_i$ für alle $i \in I$.

(b) *Hin:* Für alle $a \in A$ und $w \in V$ mit $v \xrightarrow{a} w$ existiert ein $w' \in V'$ mit $v' \xrightarrow{a} w'$ und es ist $(w, w') \in Z$.

Her: Für alle $a \in A$ und $w' \in V'$ mit $v' \xrightarrow{a} w'$ existiert ein $w \in V$ mit $v \xrightarrow{a} w$ und es ist $(w, w') \in Z$.

Gegeben seien zwei Spielgraphen $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ und $\mathcal{G}' = (V', V'_0, V'_1, E')$. Diese können als Transitionssysteme mit einer einzigen (nicht weiter ausgezeichneten) Kantenrelation E und zwei atomaren Propositionen V_0 und V_1 aufgefasst werden. Weiterhin ist eine Bisimulation $Z \subseteq V \times V'$ zwischen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ gegeben.

Zeigen Sie, dass die beiden Spiele in dem Sinn äquivalent sind, dass für alle Positionen $v \in V$ und $v' \in V'$ mit $(v, v') \in Z$ das Spiel $\mathcal{G}$ von v und das Spiel $\mathcal{G}'$ von v' aus von demselben Spieler gewonnen werden (wer nicht ziehen kann, verliert).