Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, T. Ganzow, Ł. Kaiser

SS 2009

6. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 16. 6. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Ein Paritätsspiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ heißt *schwach*, wenn entlang jeder Kante $(v, w) \in E$ gilt: $\Omega(v) \leq \Omega(w)$.

(a) Beweisen Sie, dass in einem schwachen Paritätsspiel jede starke Zusammenhangskomponente entweder nur gerade oder nur ungerade Zykel enthält. (Ein Zyklus ist gerade, wenn die kleinste darauf vorkommende Priorität gerade ist).

(b) Geben Sie ein effizientes Verfahren an, um die Gewinnmengen in solchen Spielen zu bestimmen.

(c) Zeigen Sie, dass jedes Model-Checking-Spiel für alternierungsfreie LFP-Formeln (Formeln, in denen kleinste und größte Fixpunkte nicht geschachtelt vorkommen) durch Umverteilung der Prioritäten in ein schwaches Paritätsspiel umgewandelt werden kann, so dass die Gewinnpartition erhalten bleibt.

(d) Geben Sie eine LFP-Formel an, welche die Menge der Gewinnpositionen von Spieler 0 in einem schwachen Paritätsspiel definiert.

Aufgabe 2

Die monadische Logik zweiter Stufe (MSO) ist eine Erweiterung der Prädikatenlogik erster Stufe um Quantoren über Mengenvariablen, d. h. wir erlauben zusätzlich Formeln der Form $\forall X\, \varphi(X)$ und $\exists X\, \varphi(X)$, wobei die Mengenvariable X in φ wie ein einstelliges Prädikat benutzt wird, mit folgender Semantik: $\mathfrak{A} \models \exists X \varphi(X)$ gdw. eine Teilmenge $A_0 \subseteq A$ existiert mit $\mathfrak{A} \models \varphi(A_0)$ (analog für $\forall X \dots$).

Geben Sie eine Übersetzung an, die jeder Formel $\varphi \in \mathrm{L}_\mu$ eine Formel $\varphi^*(x) \in \mathrm{MSO}$ zuordnet, so dass $\mathfrak{K}, v \models \varphi$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{K} \models \varphi^*(v)$.

Aufgabe 3

Zu einem unendlichen Wort $\alpha = \alpha(0)\alpha(1) \ldots \in \{a, b\}^\omega$ definieren wir die Kripkestruktur $\mathfrak{K}_\alpha = (\mathbb{N}, E_a, E_b)$ mit

$$E_x := \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}, \alpha(n) = x\}$$

für $x \in \{a, b\}$. Seien nun $\varphi_1 = \nu X.\mu Y.([a]X \wedge [b]Y)$ und $\varphi_2 = \mu Y.\nu X.([a]X \wedge [b]Y)$.

(a) Berechnen Sie für $i = 1, 2$ die Sprachen $L_i = \{\alpha \in \{a, b\}^\omega : \mathfrak{K}_\alpha, 0 \models \varphi_i\}$.

Hinweis: Betrachten Sie das Model-Checking-Spiel $\mathcal{G}(\mathfrak{K}_\alpha, \varphi_i)$.

(b) Gilt $\varphi_1 \models \varphi_2$ oder $\varphi_2 \models \varphi_1$ über allen Kripkestrukturen?

Aufgabe 4

Eine Gewinnbedingung $W \subseteq V^\omega$ heißt *präfixunabhängig*, wenn $x\alpha \in W \Leftrightarrow \alpha \in W$ für jedes $x \in V^*$ und $\alpha \in V^\omega$. Offensichtlich ist jede Paritätsbedingung präfixunabhängig.

(a) Zeigen Sie: Für jedes Spiel $\mathcal{G}$ über der Arena $G = (V, V_0, V_1, E)$ mit einer präfixunabhängigen Gewinnbedingung W ist die Gewinnregion W_0 von Spieler 0 ein Fixpunkt des Operators

$$F_\psi : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V) : X \mapsto \{v \in V : G, v \models \psi(X)\}$$

für die Formel $\psi(X) := (V_0 \wedge \Diamond X) \vee (V_1 \wedge \Box X) \in L_\mu$.

(b) Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen an, so dass auf Paritätsspielen $W_0 = \mathbf{lfp}(F_\psi)$ bzw. $W_0 = \mathbf{gfp}(F_\psi)$ gilt.