Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, T. Ganzow, Ł. Kaiser

SS 2009

7. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 23. 6. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

(a) Geben Sie für die folgende Mengen $X \subseteq \{0,1\}^\omega$ jeweils die kleinste Stufe Σ^0_α bzw. Π^0_α der Borel-Hierarchie an, die X enthält.

(i) $X = \{x \in \{0,1\}^\omega : x \text{ enthält beliebig lange Infixe } 10^n1\}$;

(ii) $X = \{x \in \{0,1\}^\omega : \text{enthält } x \text{ das Infix 00 unendlich oft, dann auch das Infix } 11\}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Stufe Σ^0_α bzw. Π^0_α der Borel-Hierarchie unter endlicher Vereinigung und endlichem Schnitt abgeschlossen ist.

(c) Zu einer Sprache $W \subseteq A^*$ von endlichen Wörtern definieren wir die folgende Sprache $\lim W \subseteq A^\omega$ von unendlichen Wörtern:

$$\lim W = \{x \in A^\omega : \text{ex. unendlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x_0 \dots x_n \in W\}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $L \subseteq A^\omega$ gilt: $L \in \Pi^0_2 \Longleftrightarrow L = \lim W$ für ein $W \subseteq A^*$.

Aufgabe 2

Seien $X \subseteq A^\omega$ und $Y \subseteq B^\omega$ Borel-Mengen. Wir sagen, dass X und Y *unvergleichbar* sind, wenn weder $X \leq Y$ noch $Y \leq X$ gilt. Zeigen Sie mit Hilfe von Wadge-Spielen:

(a) Sind X und Y unvergleichbar, so gilt $X \leq B^\omega \setminus Y$ und $B^\omega \setminus Y \leq X$.

(b) Keine drei Borel-Mengen sind unvergleichbar.

Aufgabe 3

Ein *Ultrafilter* ist eine Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{U}$;

(ii) für alle $A, B \subseteq \mathbb{N}$ gilt: $A \in \mathcal{U} \wedge A \subseteq B \rightarrow B \in \mathcal{U}$;

(iii) für alle $A, B \subseteq \mathbb{N}$ gilt: $A \in \mathcal{U} \wedge B \in \mathcal{U} \rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$;

(iv) für alle $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt: $A \in \mathcal{U} \vee \bar{A} \in \mathcal{U}$.

Eine Menge, die nur die ersten drei Eigenschaften erfüllt, wird *Filter* genannt.

Der sogenannte Fréchet-Filter $\mathcal{F}$ ist die Menge aller co-endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, d.h. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \text{ ist endlich}\}$.

Zeigen Sie durch geeignete Formalisierung in Aussagenlogik und Anwendung des Kompaktheitssatzes, dass der Fréchet-Filter zu einem Ultrafilter erweitert werden kann.

Hinweis: Ordnen Sie jeder Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Aussagenvariable X_A zu, so dass jede Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ eine Interpretation $\mathfrak{I}_\mathcal{F}$ durch $\mathfrak{I}_\mathcal{F}(X_A) = 1$ gdw. $A \in \mathcal{F}$ definiert und umgekehrt.