Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, T. Ganzow, Ł. Kaiser

SS 2009

8. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 30. 6. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Ein *Banach-Mazur-Spiel* (über $\{0,1\}$) ist ein unendliches Spiel, in dem die beiden Spieler abwechselnd nicht-leere Worte $x_i, y_i \in \{0,1\}^+$ wählen. Spieler 0, der das Spiel beginnt, gewinnt das Spiel, wenn die Konkatenation $\alpha = x_0 y_0 x_1 y_1 \dots$ der gezogenen Wörter in der Gewinnmenge $W \subseteq \{0,1\}^\omega$ liegt.

(a) Entscheiden Sie für die folgenden Gewinnbedingungen W, welcher Spieler das Banach-Mazur Spiel gewinnt.

  (i) $W = \{\alpha \in \{0,1\}^\omega : \alpha \text{ enthält unendlich oft das Infix } 0^{17}\}$,

  (ii) $W = \{\alpha \in \{0,1\}^\omega : \alpha \text{ enthält nur endlich oft das Infix } 010\}$,

  (iii) $W = \{\alpha \in \{0,1\}^\omega : \alpha \text{ enthält beliebig lange 0-Folgen als Infixe}\}$.

(b) Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, der den (auf dem vorherigen Übungsblatt definierten) Fréchet-Filter enthält, und sei W die Menge aller $\alpha \in \{0,1\}^\omega$, so dass $\{n : \alpha(n) = 1\} \in \mathcal{U}$. Zeigen Sie, dass das Banach-Mazur-Spiel mit Gewinnbedingung W nicht determiniert ist.

Aufgabe 2

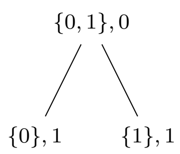
(a) Zeigen Sie, dass jede endliche Menge $X \subseteq A^\omega$ Π^0_1-vollständig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $(0^*1)^\omega$ Π^0_2-vollständig ist.

(c) Geben Sie eine abzählbare Menge X an, so dass $X \in \Sigma^0_2 \setminus \Pi^0_1$.

Aufgabe 3

Sei $C = \{0,1\}$ und $\mathcal{F}_0 = \{\{0,1\}\}$, d. h. der Zielonka-Baum für die Muller-Bedingung $\mathcal{F}_0$ hat die folgende Form:



Die Gewinnbedingung ist keine Paritätsgewinnbedingung. Zeigen Sie, dass trotzdem jedes Spiel mit dieser Muller-Bedingung positional determiniert ist.