Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, T. Ganzow, Ł. Kaiser

SS 2009

9. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 7. 7. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ ein Muller-Spiel mit $\Omega : V \to \mathbb{N}$. Wir nennen $\mathcal{G}$ ein (infinitäres) Paritätsspiel, wenn

$$\mathcal{F}_0 = \{X \subseteq \mathbb{N} : \min(X) \text{ ist gerade}\} \cup \{\emptyset\}$$

und wir nennen $\mathcal{F}_0$ einen *Abwärtskegel*, wenn eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\mathcal{F}_0 = \{X \ : \ X \subseteq A\}.$$

Ein *1-Registerspeicher* ist eine Speicherstruktur $(M, \text{update}, \text{init})$ mit $M = \mathbb{N}$ und $\text{update}(m, v) \in \{m, \Omega(v)\}$ für alle m,v.

(a) Geben Sie ein Muller-Spiel mit einem Abwärtskegel als Gewinnbedingung an, das von Spieler 0 gewonnen wird, dieser Spieler aber keine Gewinnstrategie mit endlichem Speicher hat.

(b) Reduzieren Sie mit einem 1-Registerspeicher Muller-Spiele mit Abwärtskegeln als Gewinnbedingung auf Paritätsspiele.

Aufgabe 2

Sei C eine endliche Menge. Eine *Paarbedingung* über C ist eine Menge

$$\mathcal{P} = \{(L_1, R_1), (L_2, R_2,), \ldots, (L_k, R_k)\}$$

mit $L_i, R_i \subseteq C$. Eine Paarbedingung $\mathcal{P}$ definiert die Muller-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ mit

$$\mathcal{F}_0 = \{F \subseteq C : F \cap L_i \neq \emptyset \Longrightarrow F \cap R_i \neq \emptyset \text{ für alle } i = 1, \ldots, k\},$$
$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{F}_0 \ .$$

Zeigen Sie:

(a) Die durch eine Paarbedingung $\mathcal{P}$ definierte Muller-Bedingung ist eine Streett-Rabin-Bedingung.

(b) Jede Streett-Rabin-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ ist zu einer Paarbedingung $\mathcal{P}$ äquivalent.

Hinweis: Betrachten Sie zu jedem Knoten $(X, 1)$ des zu $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ gehörenden Zielonka-Baums den eindeutigen Nachfolger $(Y, 0)$ und konstruieren Sie daraus ein geeignetes Paar.

(c) Finden Sie eine Klasse von Paarbedingungen, so dass die dadurch definierten Mullerbedingungen genau die Paritätsbedingungen sind.

Hinweis: Benutzen Sie, dass eine Muller-Bedingung genau dann zu einer Paritätsbedingung äquivalent ist, wenn ihr Zielonka-Baum ein Pfad ist.

Aufgabe 3

Sei $C = \{1, \ldots, k\}^2$ und $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ die durch die Paarbedingung $\{(L_1, R_1), \ldots, (L_k, R_k)\}$ mit

$$\begin{aligned} L_i &= \{(i, j) : j = 1, \ldots, k\}, \\ R_i &= \{(i, i)\} \end{aligned}$$

definierte Streett-Rabin-Bedingung (vgl. Aufgabe 2). Zeigen Sie, dass die Anzahl der Blätter des zu $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ gehörenden Zielonka-Baums $k!$ beträgt.