Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Fischer

SS 2011

2. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 26. 4. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Erreichbarkeitsspiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$. Betrachten Sie die folgenden Definitionen für die Mengen W_σ^n von Knoten, von denen aus Spieler σ eine Strategie hat, in höchstens n Zügen zu gewinnen:

$$\text{(i)} \qquad \begin{aligned} W_\sigma^0 &:= \{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE = \emptyset\} \\ W_\sigma^{n+1} &:= \{v \in V_\sigma \ : \ vE \cap W_\sigma^n \neq \emptyset\} \cup \{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE \subseteq W_\sigma^n\} \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \qquad \begin{aligned} \widetilde{W}_\sigma^0 &:= \{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE = \emptyset\} \\ \widetilde{W}_\sigma^{n+1} &:= \widetilde{W}_\sigma^n \cup \left\{v \in V_\sigma \ : \ vE \cap \widetilde{W}_\sigma^n \neq \emptyset\right\} \cup \left\{v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE \subseteq \widetilde{W}_\sigma^n\right\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass beide Definitionen äquivalent sind, d. h. dass $W_\sigma^n = \widetilde{W}_\sigma^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2

Aussagenlogische Hornformeln sind Formeln der Form $\bigwedge C_i$, wobei jede Klausel C_i die Form

$$\begin{aligned} X_1 \wedge \ldots \wedge X_n &\rightarrow X \quad \text{oder} \\ \underbrace{X_1 \wedge \ldots \wedge X_n}_{\text{body}(C_i)} &\rightarrow \underbrace{0}_{\text{head}(C_i)} \end{aligned}$$

hat. Eine Klausel der Form X bzw. $1 \rightarrow X$ hat einen leeren Rumpf.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass zu jeder Hornformel ψ ein Spiel $\mathcal{G}_\psi = (V, V_0, V_1, E)$ konstruiert werden kann mit

$$\begin{aligned} V &= \underbrace{\{0\} \cup \{X_1, \ldots, X_n\}}_{V_0} \cup \underbrace{\{C_i : i \in I\}}_{V_1} \quad \text{und} \\ E &= \{X_j \rightarrow C_i : X_j = \text{head}(C_i)\} \cup \{C_i \rightarrow X_j : X_j \in \text{body}(C_i)\}. \end{aligned}$$

Umgekehrt kann zu jedem Spiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ eine Hornformel $\psi_\mathcal{G}$ mit folgenden Klauseln konstruiert werden:

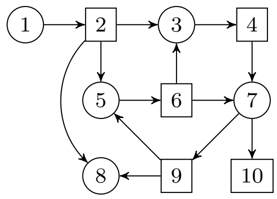
$$\begin{aligned} v &\rightarrow u & &\text{für alle } u \in V_0 \text{ und } (u, v) \in E, \\ v_1 \wedge \ldots \wedge v_m &\rightarrow u & &\text{für alle } u \in V_1 \text{ und } uE = \{v_1, \ldots, v_m\}. \end{aligned}$$

Es gilt, dass ψ genau dann unerfüllbar ist, wenn Spieler 0 das Spiel $\mathcal{G}_\psi$ von Position 0 aus gewinnt, und dass Spieler 0 ein Spiel $\mathcal{G}$ von Position v aus genau dann gewinnt, wenn $\psi_\mathcal{G} \wedge (v \rightarrow 0)$ unerfüllbar ist.

(a) Konstruieren Sie zu folgender Horn-Formel ψ das Erfüllbarkeitsspiel $\mathcal{G}_\psi$, und berechnen Sie die Gewinnregionen der beiden Spieler.

$$(1 \to X) \land (X \land Y \to Z) \land (U \to 0) \land (Z \land Y \to U) \land (V \to Y) \land (1 \to V)$$

(b) Konstruieren Sie zu folgendem Spielgraphen $\mathcal{G}$ die Hornformel $\psi_\mathcal{G}$ und bestimmen Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus, ob Knoten 5 in der Gewinnregion von Spieler 0 liegt.



Aufgabe 3

(a) Sei $A = \{1, \ldots, n\}$ eine nichtleere Menge, $\circ$ eine zweistellige Funktion auf A und S eine Teilmenge von A. Der Abschluss $\langle S \rangle$ von S in A ist die kleinste Teilmenge $U \subseteq A$ wobei $S \subseteq U$, so dass U unter $\circ$ abgeschlossen ist, d.h., wenn $u, v \in U$ dann $u \circ v \in U$.
Das Problem GEN ist, gegeben A, $\circ$, S und $c \in A$, ist $c \in \langle S \rangle$.
Zeigen Sie, dass GEN in ALOGSPACE liegt.

(b) Geography ist ein Spiel für zwei Spieler, dass auf einem gerichteten Graph $G = (V, E)$ mit einer ausgezeichneten Startposition u gespielt wird. Spielerin 0 beginnt das Spiel an u. Danach ziehen die Spieler immer abwechselnd einen Nachfolger des aktuellen Knotens. Dabei dürfen sie nur Knoten besuchen, die noch nicht besucht wurden. Falls ein Spieler nicht mehr ziehen kann, verliert er.
Das Problem GEOGRAPHY ist, zu entscheiden, ob Spielerin 0 eine Gewinnstrategie im Spiel Geography vom Startknoten aus hat.
Zeigen Sie, dass GEOGRAPHY in APTIME liegt.