Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Fischer

SS 2011

4. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 10. 5. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

(a) Sei $(\mathbb{N}, s)$ die Struktur der natürlichen Zahlen mit der Nachfolgefunktion $s(x) := x + 1$. Geben Sie LFP-Formeln an, welche die Addition, Multiplikation und Exponentiation definieren, d. h. $\varphi_+(x, y, z)$ gilt genau dann, wenn $x + y = z$ usw.

(b) Geben Sie L_μ-Formeln an, welche besagen, dass

(i) es einen Pfad gibt, auf dem irgendwann nur noch Zustände aus P vorkommen;

(ii) auf allen Pfaden immer wieder ein Zustand aus P vorkommt;

(iii) auf allen Pfaden, immer wenn ein Zustand aus P auftaucht, es von diesem Zustand aus einen Pfad zu einem Zustand aus Q gibt.

Aufgabe 2

Eine Gewinnbedingung $W \subseteq V^\omega$ heißt *präfixunabhängig*, wenn $x\alpha \in W \Leftrightarrow \alpha \in W$ für jedes $x \in V^*$ und $\alpha \in V^\omega$. Offensichtlich ist jede Paritätsbedingung präfixunabhängig.

(a) Zeigen Sie: Für jedes Spiel $\mathcal{G}$ über der Arena $G = (V, V_0, V_1, E)$ mit einer präfixunabhängigen Gewinnbedingung W ist die Gewinnregion W_0 von Spieler 0 ein Fixpunkt des Operators

$$F_\psi : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V) : X \mapsto \{v \in V : G, v \models \psi(X)\}$$

für die Formel $\psi(X) := (V_0 \wedge \Diamond X) \vee (V_1 \wedge \Box X) \in L_\mu$.

(b) Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen an, so dass auf Paritätsspielen $W_0 = \mathbf{lfp}(F_\psi)$ bzw. $W_0 = \mathbf{gfp}(F_\psi)$ gilt.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Spiele $(G, V, V_0, V_1, E, \mathrm{Win})$, wobei Win eine der folgenden Gewinnbedingungen darstellen soll:

- Reachability(F): Spieler 0 gewinnt eine Partie π, falls $\mathrm{Occ}(\pi) \cap F \neq \emptyset$
- Safety(F): Spieler 0 gewinnt eine Partie π, falls $\mathrm{Occ}(\pi) \subseteq F$
- Büchi(F): Spieler 0 gewinnt eine Partie π, falls $\mathrm{Inf}(\pi) \cap F \neq \emptyset$
- co-Büchi(F): Spieler 0 gewinnt eine Partie π, falls $\mathrm{Inf}(\pi) \subseteq F$,

wobei $\mathrm{Occ}(\pi)$ die Menge aller in π vorkommenden Knoten und $\mathrm{Inf}(\pi)$ die Menge aller unendlich oft in π vorkommenden Knoten bezeichnet.
Untersuchen Sie für jede Gewinnbedingung, ob es eine Gewinnstrategie für Spieler σ ist, immer in seiner Gewinnregion W_σ zu bleiben.