Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Fischer

SS 2011

7. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 7. 6. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

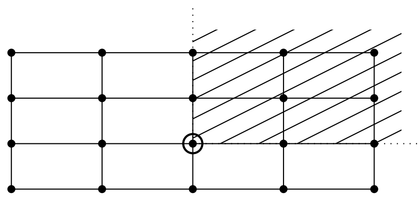
Aufgabe 1

Ein Spiel $G = (V, V_0, V_1, E, Win)$ heisst offen, wenn die Gewinnbedingung $Win \subseteq V^\omega$ offen ist. Zeigen Sie, dass jedes offene Spiel determiniert ist.

Aufgabe 2

Eine rechteckige Schokoladentafel mit $n \times m$ Stücken kann als Gitter $\{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$ aufgefasst werden, so dass die Gitterflächen den Stücken und die Knoten des Gitters den Bruchstellen der Schokoladentafel entsprechen.

Wir betrachten folgendes Spiel auf einer rechteckigen Schokoladentafel: Die Spieler wählen abwechselnd (Spieler 0 beginnt) einen Gitterknoten und entfernen alle Schokoladenstücke, die sich rechts überhalb dieses Knotens befinden. Bei jedem Zug muss dabei mindestens ein Schokoladenstück entfernt werden. Verloren hat derjenige Spieler, der das letzte übrigbleibende Stück nehmen muss.



Zeigen Sie, dass außer für $n = m = 1$ immer der gleiche Spieler das Spiel gewinnt, unabhängig von der Größe der Schokoladentafel. Führen Sie den Beweis für den allgemeinen Fall durch Verwendung des Satzes über die Determiniertheit endlicher Spiele und geben Sie zusätzlich für den Spezialfall $m = n$ eine explizite Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler an.

Aufgabe 3

Ein *Banach-Mazur-Spiel* (über $\{0, 1\}$) ist ein unendliches Spiel, in dem die beiden Spieler abwechselnd nicht-leere Worte $x_i, y_i \in \{0, 1\}^+$ wählen. Spieler 0, der das Spiel beginnt, gewinnt das Spiel, wenn die Konkatenation $\alpha = x_0y_0x_1y_1 \dots$ der gezogenen Wörter in der Gewinnmenge $W \subseteq \{0, 1\}^\omega$ liegt.

(a) Entscheiden Sie für die folgenden Gewinnbedingungen W, welcher Spieler das Banach-Mazur Spiel gewinnt.

  (i) $W = \{\alpha \in \{0, 1\}^\omega : \alpha \text{ enthält unendlich oft das Infix } 0^{17}\}$,

  (ii) $W = \{\alpha \in \{0, 1\}^\omega : \alpha \text{ enthält nur endlich oft das Infix } 010\}$,

  (iii) $W = \{\alpha \in \{0, 1\}^\omega : \alpha \text{ enthält beliebig lange 0-Folgen als Infixe}\}$.

(b) Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, der den Fréchet-Filter enthält, und sei W die Menge aller $\alpha \in \{0, 1\}^\omega$, so dass $\{n : \alpha(n) = 1\} \in \mathcal{U}$. Zeigen Sie, dass das Banach-Mazur-Spiel mit Gewinnbedingung W nicht-determiniert ist.