Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Fischer, W. Pakusa

SS 2011

8. Übung Logik und Spiele

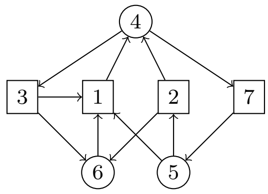
Abgabe: bis Dienstag, den 21. 6. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Betrachten Sie den unten dargestellten Spielgraphen mit der Muller-Bedingung

$$\mathcal{F}_0 = \{\{2,4,5,7\},\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$$

und Anfangsposition 4. Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler 0 mit der minimalen Anzahl von Speicherzuständen an und beweisen Sie die Minimalität.



Aufgabe 2

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ ein Muller-Spiel mit $\Omega : V \to \mathbb{N}$. Wir nennen $\mathcal{G}$ ein (infinitäres) Paritätsspiel, wenn

$$\mathcal{F}_0 = \{X \subseteq \mathbb{N} : \min(X) \text{ ist gerade}\} \cup \{\emptyset\}$$

und wir nennen $\mathcal{F}_0$ einen *Abwärtskegel*, wenn eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\mathcal{F}_0 = \{X \ : \ X \subseteq A\}.$$

Ein *1-Registerspeicher* ist eine Speicherstruktur $(M, \text{update}, \text{init})$ mit $M = \mathbb{N}$ und $\text{update}(m, v) \in \{m, \Omega(v)\}$ für alle m,v.

(a) Geben Sie ein Muller-Spiel mit einem Abwärtskegel als Gewinnbedingung an, das von Spieler 0 gewonnen wird, dieser Spieler aber keine Gewinnstrategie mit endlichem Speicher hat.

(b) Reduzieren Sie mit einem 1-Registerspeicher Muller-Spiele mit Abwärtskegeln als Gewinnbedingung auf Paritätsspiele.

Aufgabe 3

Sei C eine endliche Menge und $C = C_1 \cup C_2$. Wir betrachten die durch $\mathcal{F}_1 = \{\ X \subseteq C : X \subseteq C_1 \text{ oder } X \subseteq C_2\}$ definierte Streett-Rabin-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ über C. Zeigen Sie, dass jedes Spiel mit Gewinnbedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ positional determiniert ist.

Aufgabe 4

Sei C eine endliche Menge. Eine *Paarbedingung* über C ist eine Menge

$$\mathcal{P} = \{(L_1, R_1), (L_2, R_2,), \dots, (L_k, R_k)\}$$

mit $L_i, R_i \subseteq C$. Eine Paarbedingung $\mathcal{P}$ definiert die Muller-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ mit

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_0 = \{F \subseteq C : F \cap L_i \neq \emptyset \Longrightarrow F \cap R_i \neq \emptyset \text{ für alle } i = 1, \dots, k\}, \\
&\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{F}_0 \ .
\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Die durch eine Paarbedingung $\mathcal{P}$ definierte Muller-Bedingung ist eine Streett-Rabin-Bedingung.

(b) Jede Streett-Rabin-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ kann durch eine Paarbedingung $\mathcal{P}$ definiert werden.

Hinweis: Betrachten Sie zu jedem Knoten $(X, 1)$ des zu $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ gehörenden Zielonka-Baums den eindeutigen Nachfolger $(Y, 0)$ und konstruieren Sie daraus ein geeignetes Paar.

(c) Finden Sie eine Klasse von Paarbedingungen, so dass die dadurch definierten Mullerbedingungen genau die Paritätsbedingungen sind.