

9. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 28.6. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Auf Übungsblatt 8 definierten wir den Begriff einer Paarbedingung über einer Menge C .

Konstruieren Sie für $k \geq 1$ eine Streett-Rabin Gewinnbedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ über der Farbmengemenge $C = \{1, \dots, k\}^2$, so dass diese durch eine Paarbedingung \mathcal{P} mit k vielen Paaren (d.h. $|\mathcal{P}| = k$) ausgedrückt werden kann, ihr zugehöriger Zielonka Baum jedoch $k!$ Blätter besitzt.

Aufgabe 2

Eine *verallgemeinerte Büchi-Bedingung* über einer Menge C von Farben ist gegeben durch eine Familie \mathcal{B} von Teilmengen von C , also $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$ und $B_1, \dots, B_k \subseteq C$. Sie definiert die Muller-Gewinnbedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$, mit $\mathcal{F}_0 := \{X \subseteq C : \text{für alle } 1 \leq i \leq k : X \cap B_i \neq \emptyset\}$ und $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{F}_0$.

Ein *verallgemeinertes Büchi-Spiel* über einer Arena $G = (V, V_0, V_1, E, \Omega: V \rightarrow C)$ ist ein Tupel $\mathcal{G} = (G, \mathcal{B})$, wobei \mathcal{B} eine verallgemeinerte Büchi-Gewinnbedingung für Spieler 0 ist.

- Ermitteln Sie für eine gegebene verallgemeinerte Büchi-Gewinnbedingung \mathcal{B} minimale Werte $m_0, m_1 \geq 1$, so dass verallgemeinerte Büchi-Spiele mit Gewinnbedingung \mathcal{B} determiniert sind via Strategien mit Speicher der Größe m_i für Spieler i .
- Wir sagen, dass eine Muller-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ *abgeschlossen ist unter Obermengen*, falls $X \in \mathcal{F}_0, X \subseteq Y$ impliziert $Y \in \mathcal{F}_0$. Zeigen Sie, dass unter Obermengen abgeschlossene Muller-Bedingungen genau den verallgemeinerten Büchi-Gewinnbedingungen entsprechen.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass das folgende Entscheidungsproblem NP-vollständig ist.

- Gegeben ein verallgemeinertes Büchi-Spiel $\mathcal{G} = (G, \mathcal{B})$, $v \in V$ und eine natürliche Zahl k .
- Frage: Hat Spieler 0 von v aus eine Gewinnstrategie mit Speicher der Größe k ?

Hinweis: Verwenden Sie für den Beweis der NP-Härte das NP-vollständige Problem *Vertexcover*: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k . Frage: Gibt es eine Teilmenge $X \subseteq V$ mit $|X| \leq k$, so dass für alle Kanten $(v, w) \in E$ gilt $v \in X$ oder $w \in X$.

Aufgabe 4

(a) Wir betrachten das durch die folgende Matrix gegebene 2-Personen-Spiel:

$$\begin{bmatrix} (2, 5) & (1, 1) \\ (4, 3) & (2, 3) \end{bmatrix}$$

Hat dieses Spiel

- (i) ein Gleichgewicht in dominanten Strategien?
 - (ii) ein reines Nash-Gleichgewicht?
- (b) Ist für alle Spiele jedes Gleichgewicht in dominanten Strategien auch ein Nash-Gleichgewicht?
- (c) Geben Sie ein endliches Zwei-Personen-Spiel in strategischer Form an, das ein eindeutiges (reines) Nash-Gleichgewicht hat, so dass beide Gleichgewichts-Strategien von einer anderen Strategie des jeweiligen Spielers dominiert werden.