Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Fischer, W. Pakusa

SS 2011

10. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Dienstag, den 05. 07. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Ein endliches Spiel $\Gamma = \big(N, (S_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N}\big)$ in strategischer Form heißt *Potential-Spiel*, falls eine Potentialfunktion $\Phi : S \to \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle Strategieprofile $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$, alle Spieler $i \in N$ und alle $s_i' \in S_i$ gilt:

$$\Phi(s_i, s_{-i}) - \Phi(s_i', s_{-i}) = p_i(s_i, s_{-i}) - p_i(s_i', s_{-i})\,.$$

Zeigen Sie, dass jedes Potential-Spiel ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien besitzt.

Aufgabe 2

(a) Wir betrachten das Spiel „Battle of the Sexes“ aus der Vorlesung, das durch die folgende Matrix gegeben ist:

$$\begin{bmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien für dieses Spiel.

(b) Wir betrachten das Spiel „Schere – Stein – Papier“ wie in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie, dass das Paar von gemischten Strategien, in dem beide Spieler jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ Stein, Schere oder Papier auszuwählen, das einzige Nash-Gleichgewicht ist.

Aufgabe 3

(a) Geben Sie ein endliches 2-Personen-Spiel in strategischer Form mit einem eindeutigen gemischten Nash-Gleichgewicht (f^*, g^*) an, so dass für jeden der beiden Spieler $i = 0, 1$ gilt:

$$\max_{f\in\Delta(S_i)} \min_{g\in\Delta(S_{1-i})} p_i(f, g) < p_i(f^*, g^*).$$

(b) Sei für ein endliches Spiel $\Gamma = \big(N, (S_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N}\big)$ ein Profil $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \Delta(S)$ in gemischten Strategien gegeben. Zeigen Sie, dass μ genau dann ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien ist, wenn für jeden Spieler i gilt: jede (reine) Strategie $s \in \mathrm{supp}(\mu_i)$ ist eine beste Antwort auf μ_{-i}.

Aufgabe 4

Geben Sie alle Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien für das Spiel der Reisenden aus der Vorlesung an.

Hinweis: Zeigen Sie, dass ein Strategieprofil (μ_1, μ_2) genau dann ein Nash-Gleichgewicht ist, wenn (μ_2, μ_1) ein Nash-Gleichgewicht ist und verwenden Sie das Ergebnis aus der Aufgabe 3(b).