Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, W. Pakusa

SS 2013

2. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Montag, den 29. 4., um 13:30 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Geben Sie explizit Algorithmen (in Pseudocode) an, welche das FO-Modelchecking Problem innerhalb der angegebenen Komplexitätsschranken entscheiden.

(i) $\mathrm{ATIME}(\mathcal{O}(|\psi| + \mathrm{qr}(\psi)\log|A|))$

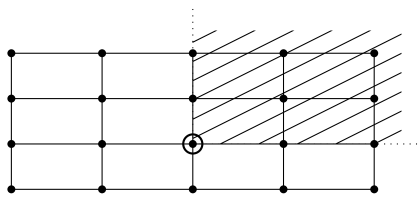
(ii) $\mathrm{ASPACE}(\mathcal{O}(\mathrm{width}(\psi)\log|A| + \log|\psi|))$

(iii) $\mathrm{DSPACE}(\mathcal{O}(|\psi| + \mathrm{qr}(\psi)\log|A|))$

Aufgabe 2

Eine rechteckige Schokoladentafel mit $n \times m$ Stücken kann als Gitter $\{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, m\}$ aufgefasst werden, so dass die Gitterflächen den Stücken und die Knoten und Kanten des Gitters den Bruchstellen der Schokoladentafel entsprechen.

Wir betrachten folgendes Spiel auf einer rechteckigen Schokoladentafel: Die Spieler wählen abwechselnd (Spieler 0 beginnt) einen Gitterknoten und entfernen alle Schokoladenstücke, die sich rechts überhalb dieses Knotens befinden. Bei jedem Zug muss dabei mindestens ein Schokoladenstück entfernt werden. Verloren hat derjenige Spieler, der das letzte übrigbleibende Stück nehmen muss.



Zeigen Sie, dass (bis auf einen Sonderfall) immer der gleiche Spieler (welcher?) das Spiel gewinnt, egal wie groß die Schokoladentafel ist.

Hinweis: Geben Sie keine explizite Gewinnstrategie an, sondern folgern Sie deren Existenz aus dem Satz über die Determiniertheit endlicher Spiele.

Aufgabe 3

Wir betrachten fundierte Spiele (d. h. der Spielgraph enthält keine unendlichen Pfade), in denen ein Spieler genau dann gewinnt, wenn sein Gegner am Zug ist, aber nicht ziehen kann.

Wir nennen ein solches Spiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ *bipartit*, falls $E \subseteq (V_0 \times V_1) \cup (V_1 \times V_0)$ gilt, d. h. falls V_0 und V_1 gerade eine Bipartition des Spielgraphen darstellt. Spieltheoretisch bedeutet dies, dass die beiden Spieler immer strikt alternierend ziehen.

(a) Seien $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ und $\mathcal{G}' = (V', V_0', V_1', E')$ zwei bipartite Spiele. Wir betrachten für jeden Spieler $i \in \{0, 1\}$ die Komposition $\mathcal{G} \oplus_i \mathcal{G}'$, bei der die beiden Spiele in folgender Weise parallel gespielt werden: Spieler i hat an Positionen in $V_i \times V_i'$ die Wahl, in welchem der beiden Spiele er seinen Zug macht, und Spieler $1 - i$ muss in demselben Spiel antworten. Definieren Sie die beschriebene Komposition $\oplus_i$ von zwei bipartiten Spielen formal.

(b) Wir ordnen jedem Spiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ das *duale Spiel* $\mathcal{G}^d = (V, V_1, V_0, E)$ zu, bei dem die Positionen (und damit die Rollen) der Spieler vertauscht sind.

Beweisen Sie das sogenannte *Copycat-Theorem*: In jedem fundierten bipartiten Spiel $\mathcal{G}$ gewinnt Spieler i von jeder Position der Form $(v, v) \in \mathcal{G} \oplus_i \mathcal{G}^d$ aus. (Beachten Sie, dass Spieler $1 - i$ das Spiel beginnt.)

Aufgabe 4

Wir betrachten Strukturen der Form $G = (V, V_0, V_1, E, W_0, W_1, F_0, F_1)$. Hierbei sei (V, V_0, V_1, E) ein fundiertes Spiel und W_σ unäre und F_σ binäre Relationen.

- Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(V_0, V_1, E, W_0, W_1)$ an, die besagt, dass W_0, W_1 die Gewinnregionen von Spieler 0 bzw. Spieler 1 sind.
- Geben Sie für $\sigma \in \{0, 1\}$ eine Formel $\psi_\sigma \in \mathrm{FO}(V_0, V_1, E, W_0, W_1, F_0, F_1)$ an, die für alle G mit $G \models \varphi$ besagt, dass F_σ eine (positionale) Gewinnstrategie für Spieler σ beschreibt.